A. Hydr.
28 hg

hydr.

8 hy

Deschwanden, J. W.

Ueber die

in den Beharrungszustand gelangte

Bewegung der Flüssigkeiten.

Von

J. W. Deschwanden.

Zürich,

Verlag von Orell, Füßli und Comp.

1848.

189. Ac

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Einige Arbeiten über hydraulische Maschinen, in denen sich das Wasser durch krumme Kanäle bewegt, gaben die Veranlassung zu den vorliegenden Untersuchungen. Die Grundlage derselben bildet, wie man sich bald überzeugen wird, die Bestimmung des Einflusses, den die Fliehkraft der einen Flüssigkeitstheilchen auf die Bewegung der andern ausübt. Der größte Theil dieser Blätter ist alsdann der Darstellung einiger Anwendungen der dießfälligen Ergebnisse auf besondere Fälle gewidmet, während nur im Anfange einiges Wenige über geradlinige Bewegungen angeschlossen wurde.

Nothwendiger, als diese Andeutungen über die Entstehungsweise dieser Untersuchungen, möchte aber eine Angabe der Gründe sein, die mich zu ihrer Veröffentlichung bewogen, indem bekannt ist, wie wenig Hoffnung auf einigen Erfolg die Schwierigkeit der hier behandelten Aufgaben zuläßt. Diese Gründe aber waren keine andern, als: weil mir schien, die Wirkung der Fliehkraft sei bisher noch nicht in demselben Umfange zur Erklärung der Flüssigkeitsbewegungen benutzt worden, weil ferner die erhaltenen Ergebnisse ziemlich genau mit den Erfahrungen übereinstimmen, die man über jene Bewegungen gemacht hat, und weil ich endlich dachte, zu allen, auch noch so großen Bauten seien auch kleine Bausteine nöthig. Ich hatte nur noch den

Wunsch gehegt, selber auch einige Versuche anstellen zu können, um auf diesem Wege einige jener Ergebnisse zu prüfen, die durch die bisherigen Erfahrungen weder bestätigt noch widerlegt wurden. Da mich aber äußere Verhältnisse daran hinderten, und dieselben sich in der nächsten Zeit in dieser Beziehung nicht günstiger gestalten werden, so mußte ich mich damit begnügen, mehrere Resultate der Theorie vorderhand ohne berichtigende oder bestätigende Erfahrungsresultate hinzustellen.

Ich füge schließlich nur noch den Wunsch bei, daß es mir gelungen sein möchte, mit dieser Arbeit etwas, wenn auch nur Weniges zu einem glücklichen Erfolge der erneuten Anstrengungen beizutragen, die gegenwärtig wieder zur Lösung der Aufgaben gemacht werden, zu denen die hier behandelte ebenfalls gehört.

Im Mai 1848.

Der Verfasser.

Ueber die in den Beharrungszustand gelangte Bewegung von Flüssigkeiten.

Ein begrenzter Raum, von beliebiger aber unveränderlicher Größe und Gestalt, werde von einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit ausgefüllt, die eine solche Bewegung besitzen soll, daß in irgend einem Punkte jenes Raumes sowohl ihre Richtung als Geschwindigkeit stets unverändert bleiben. Dabei können die Flüssigkeitstheilchen entweder den Raum nur durchströmen, indem sie an irgend einer Stelle in denselben ein-, an einer andern wieder austreten, wie wenn z. B. in ein Gefäß oben Flüssigkeit einfließt und unten wieder ausströmt; oder die Flüssigkeitstheilchen können stets in dem angenommenen Raume bleiben, indem sie sich nur innerhalb desselben herumbewegen, wie wenn z. B. eine Flüssigkeit in einem Gefäße eine wirbelnde Bewegung macht, ohne herauszufließen oder neuen Zuwachs zu erhalten.

Betrachtet man nun einen zusammenhängenden Theil dieser flüssigen Masse, die sich in einem beliebigen Zeitpunkte an irgend einer Stelle jenes Raumes befinden mag, und verfolgt denselben bei der Bewegung, die er macht, so wird er seine Gestalt auf die manigfaltigste Weise verändern, ja selbst in zwei und mehrere von einander getrennte Theile getheilt werden können, während er nur eine seiner geometrischen Eigenschaften beibehält, die nämlich, daß wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit sein Rauminhalt oder die Summe der Räume aller Theile in welche er zerlegt worden, immer unverändert bleibt. Man sieht nun aber leicht ein, daß die ganze Flüssigkeitsmasse in solche Theile eingetheilt werden kann, von denen keiner, während seiner Bewegung in dem betrachteten Raume, noch weiter zertheilt wird. Denn man theile zuerst

die ganze Flüssigkeitsmasse in beliebige Theile ein, untersuche dann in was für kleinere Theile jeder derselben bei seiner Bewegung durch den betrachteten Raum zerfalle, und denke sich nun gleich von Anfang die ganze Masse in diese kleineren Theile eingetheilt, so wird jeder derselben während seiner ganzen Bewegung in dem Raume nicht weiter mehr getrennt werden. Denkt man sich nun die ganze Flüssigkeitsmasse in unendlich viele, unendlich kleine Theile eingetheilt, so wird daher jeder derselben während seiner Bewegung in dem betrachteten Raume unzertheilt bleiben.

Jedes dieser unendlich kleinen Flüssigkeitstheilchen durchläuft nun während seiner Bewegung einen Theil des Raumes, der einem unendlich dünnen, auf verschiedene Weise gekrümmten Kanale oder Faden von ungleicher Dicke gleicht. Fließt die Flüssigkeit durch den betrachteten Raum hindurch, so wird jeder dieser Flüssigkeitsfäden an irgend einer Stelle in diesen Raum ein-, an einer andern wieder austreten; bewegt sich dagegen die Flüssigkeit nur in dem Raume, so werden auch jene Fäden diesen Raum nicht verlassen. Da nun der Voraussetzung nach die Flüssigkeit in jedem Punkte eines jeden solchen Kanals immer genau dieselbe Bewegung der Richtung und Größe nach besitzt, so bestehen daher diese irgend einmal von einem Flüssigkeitstheilchen durchlaufenen Kanäle nicht nur in der Vorstellung, sondern bezeichnen die Räume, welche in der Wirklichkeit die einzelnen unendlich kleinen Flüssigkeitstheilchen fortwährend beschreiben. D a h e r k a n n m a n n u n d i e g a n z e F l ü s s i g k e i t s m a s s e i n n e r h a l b d e s b e t r a c h t e t e n R a u m e s i n s o l c h e K a n ä l e o d e r F ä d e n z e r l e g t d e n k e n, welche, da sie den ganzen Raum ausfüllen müssen, dicht aneinander liegen und durch welche sich die Flüssigkeitstheilchen hinbewegen. Um sich etwas deutlicher vorstellen zu können, wie alle diese Kanälchen neben einander liegen, könnte man sich jedes derselben von einem Röhrchen von gleicher Gestalt und Größe und mit unendlich dünnen Wänden eingeschlossen denken. Der ganze Raum, in welchem sich die Flüssigkeit bewegt, würde alsdann in lauter solche Röhrchen zerlegt werden und die Flüssigkeit gerade so durch dieselben durchfließen, wie es in der Wirklichkeit auch ohne jene gedachten Röhrchen geschieht. Statt besonderer Wände bildet dann

in der Wirklichkeit die umgebende Flüssigkeit selbst die Wand für jedes einzelne Kanälchen. Im Folgenden soll nun versucht werden, die Gesetze anzugeben, nach denen sich die Gestalt dieser Kanäle und die Bewegung der in ihnen enthaltenen Flüssigkeit richtet.

AB, Fig. 1, sei einer dieser Kanäle. Bei A sei die Geschwindigkeit mit welcher die Flüssigkeit durch ihn strömt gleich v_1, die Pressung welche auf jede Flächeneinheit seines Querschnittes nach der Richtung der Bewegung ausgeübt wird gleich p_1 und der Flächeninhalt dieses, senkrecht auf die Axe des Kanals geführten Querschnittes gleich q_1. Die Buchstaben v, p und q sollen die entsprechenden Größen für einen beliebigen andern Punkt B des Kanales bedeuten, der um die Höhe h senkrecht unter A liege. Da sich die Wände des Kanales zwischen A und B nicht bewegen und mithin keine mechanische Wirkung auf die durchfließende Flüssigkeit, sondern höchstens einen Druck ausüben, so sind p_1 und p und die Schwere die einzigen Kräfte, welche auf ihre Bewegung einen Einfluß ausüben. Wird nun das Gewicht einer Volumeneinheit der Flüssigkeit mit s bezeichnet, so hat man daher zufolge den allgemeinen Gesetzen der Mechanik die Gleichung:

$$1) \;.\;.\;.\;.\;.\; p_1q_1v_1 + sq_1v_1h - pqv = \frac{sq_1v_1}{g} \cdot \frac{v^2 - v_1^2}{2}$$

Diese Gleichung, welche ausdrückt, daß die lebendige Kraft, welche die Flüssigkeit während ihrer Bewegung von A bis B erhält, gleich der algebraischen Summe aller mechanischen Wirkungen sei, welche während dieser Bewegung auf sie ausgeübt werden, ist von den eigenthümlichen Eigenschaften der Flüssigkeiten ganz unabhängig; wegen dieser eigenthümlichen Eigenschaften aber wird die Flüssigkeit genöthiget, in ihrer Bewegung neben diesem allgemeinen auch noch andern, nur für sie gültigen Gesetzen zu gehorchen, welche durch andere Gleichungen ausgedrückt werden müssen. Neben der vollkommenen Verschiebbarkeit der einzelnen Thleile der Flüssigkeit auf einander, welche dadurch ausgesprochen ist, daß keine Reibungen in Gleichung 1 eingeführt wurden, ist Unveränderlichkeit ihres Volumens ihr unterscheidendes Merkmal. Die Räume der bei A und bei B in einer Zeiteinheit durchströmenden Flüssigkeit sind daher gleich groß, was durch die Gleichung:

$$qv = q_1 v_1 = \text{Const.} \ \ldots\ldots\ (2)$$

ausgedrückt wird.

Eine Folge jener leichten Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheilchen auf einander ist ferner die Fortpflanzung des auf irgend einen Punkt der flüssigen Masse ausgeübten Druckes. Die bekannten Gesetze, nach welchen dieselbe bei einer ruhenden Flüssigkeit stattfindet, lassen sich aber nicht unmittelbar auf eine bewegte flüssige Masse anwenden; deßhalb müssen die Gesetze, nach denen sie sich in diesem Falle richtet, besonders unsersucht werden.

Wird auf irgend einen Punkt der Kanalwand, z. B. auf den Punkt B ein Druck p ausgeübt (denselben auf die Flächeneinheit bezogen), so ergibt sich sogleich, daß derselbe nicht nach allen Punkten des Kanales unverändert fortgepflanzt wird, weil die Geschwindigkeit, sowie die Höhe h für verschiedene Punkte verschieden sind. Es soll daher zunächst untersucht werden, nach welcher Richtung des Kanals die Kraft p von irgend einem Punkte B aus unverändert fortgepflanzt werde, oder in welchem durch B geführten Querschnitte des Kanales die Pressung und Geschwindigkeit gleich groß sei.

Sind BC und B_1C_1, Fig. 2, zwei unendlich wenig von einander entfernte Querschnitte gleicher Pressung, so müssen dieselben eine solche Lage haben, daß alle auf das Flüssigkeitstheilchen BCC_1B_1 einwirkenden Kräfte dasselbe genau durch die Axe m_1m des Kanals bewegen. Ist der Krümmungshalbmesser der Kanalaxe in mm_1 gleich r, die senkrechte Entfernung der Querschnitte BC und B_1C_1 gleich d und die mittlere Größe dieser Querschnitte selbst gleich q_1, so ist die Masse des Theilchens BCC_1B_1 gleich $\frac{q_1 ds}{g}$ und damit sich dasselbe in der Axe mm_1 bewege, muß die Mittelkraft aller senkrecht auf mm_1 wirkenden Kräfte gleich der Summe der Fliehkraft $\frac{q_1 ds}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$ des Theilchens BCC_1B_1 und des nach dieser Richtung hin wirkenden Theiles der Schwere fsdh sein, wo dh den senkrechten Höhenunterschied von CC_1 und BB_1 und f den senkrecht auf die Krümmungsebene durch mm_1 geführten Querschnitt des Theilchens bezeichnet. Die Richtung jener Mittelkraft

muß dieser Summe von Kräften gerade entgegengesetzt sein. Die Mittelkraft aller parallel mit der Axe mm_1 wirkenden Kräfte kann dagegen eine beliebige Größe haben. Nun wirken aber folgende Kräfte auf BCC_1B_1:

Senkrecht auf jede Flächeneinheit des Querschnittes BC oder q eine gewisse Kraft p; auf die ganze Fläche also pq. Der senkrecht auf mm_1 wirkende Theil dieser Kraft ist $pq \sin \alpha$ und ist nach dem Mittelpunkte von r gerichtet.

Senkrecht auf B_1C_1 oder $q + dq$ wirkt die Kraft $(p + dp)$ $(q + dq)$. Bildet B_1C_1 mit mm_1 den Winkel $\alpha + d\alpha$, so ist der senkrecht auf mm_1 wirkende Theil dieser Kraft gleich $(p + dp)$ $(q + dq)$ $(\alpha + d\alpha)$ und seine Richtung geht vom Mittelpunkte von r nach auswärts.

Bezeichnet man wieder die Fläche des senkrecht auf der Krümmungsebene stehenden Durchschnittes mm_1 mit f, so ist die äußere Fläche CC_1 gleich $f - df$ und BB_1 gleich $f + df$, und beide sind im Allgemeinen zu mm_1 unter einem unendlich kleinen Winkel $d\beta$ geneigt. Nun ist der Druck auf jede Flächeneinheit von CC_1 gleich $p + \frac{dp}{2}$, der Druck auf die ganze Fläche gleich $(p + \frac{1}{2} dp)$ $(f - df)$, und der senkrecht auf mm_1 und nach Außen wirkende Theil dieser Kraft gleich $(p + \frac{1}{2} dp)$ $(f - df) \cos d\beta$.

Auf BB_1 wirkt außer der Kraft $(p + \frac{1}{2} dp)$ $(f + df)$ noch ein von der Fliehkraft herkommender Druck, der in dem Verhältnisse größer ist als die Fliehkraft selbst, wie $f + df$ größer ist als f, und daher durch $\frac{q_1 ds}{g} \cdot \frac{v^2}{r}\left(1 + \frac{df}{f}\right)$ ausgedrückt werden muß. Außerdem wirkt auf BB_1 die Schwere mit dem Drucke $s(f + df)dh$. Der ganze auf BB_1 wirkende Druck ist daher gleich $\left(p + \frac{1}{2} dp + sdh + \frac{q_1 dsv^2}{fr}\right)$ $(f + df)$, und der senkrecht auf mm_1 nach dem Mittelpunkte von r hin wirkende Theil dieser Kraft gleich

$$\left(p + \frac{1}{2} dp + sdh + \frac{q_1 dsv^2}{fr}\right) (f + df) \cos d\beta.$$

Soll nun das Flüssigkeitstheilchen BCC_1B_1 durch die Axe mm_1 bewegt werden, so muß daher die Gleichung bestehen:

$$pq \sin \alpha - (p + dp)(q + dq) \sin(\alpha + d\alpha) - [(p + \tfrac{1}{2} dp)(f - df) - (p + \tfrac{1}{2} dp)(f + df) - s(f + df)dh - \frac{q_1 ds v^2}{fr}(f + df)] \cos d\beta$$

$$= \frac{q_1 ds v^2}{r} + sfdh$$

oder wenn die angedeuteten Multiplikationen und Subtraktionen ausgeführt und die unendlich kleinen Größen höherer Ordnungen weggelassen werden:

$$-(pq\, d\alpha + p \sin \alpha\, dq + q \sin \alpha\, dp) + [2\, p\, df + s\,(f + df)\, dh + \frac{q_1 ds v^2}{fr}(f + df)] \cos d\beta = \frac{q_1 ds v^2}{r} + sfdh.$$

Da ferner $m_1 B_1$ proportional mit $\frac{1}{2}(q + dq)$ ist, ergibt sich sogleich aus obiger Figur, daß

$$df = \tfrac{1}{2}(q + dq) \frac{d\alpha}{\cos \alpha}$$

Mit Benutzung dieses Werthes und wenn df gegen f und dq gegen q vernachläßigt wird, erhält man aus dieser Gleichung:

$$pq\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right) d\alpha - (pdq + qdp) \sin \alpha + sfdh + \frac{q_1 ds v^2}{r}$$

$$= \frac{q_1 ds v^2}{r} + sfdh.$$

Diese Gleichung ist dann immer richtig wenn:

$$\alpha = 0$$

ist; d. h.: b e i a l l e n K a n ä l e n v o n u n e n d l i c h k l e i n e m Q u e r s c h n i t t e u n d v o n b e l i e b i g e r G e s t a l t i s t d i e P r e s s u n g d e r F l ü s s i g k e i t i n a l l e n P u n k t e n e i n e s Q u e r s c h n i t t e s, w e l c h e r s e n k r e c h t a u f d i e A x e g e f ü h r t w i r d, g l e i c h g r o ß. — Außerdem ist diese Pressung auch noch in jenen Querschnitten gleich groß, die der Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right) \sin \alpha} = \frac{dq}{q} + \frac{dp}{p}$$

entsprechen, was nur bei Kanälen von einer gewissen speziellen Gestalt eintreffen kann.

Da nun eine Pressung p, die in irgend einem Punkte der Kanalwand CC_1 auf jede Flächeneinheit der Flüssigkeit ausgeübt wird, sich nach keinem andern Punkte der Wand BB_1 unverändert

fortpflanzt, als nach dem senkrecht gegenüberliegenden, und diese Kraft sich von da aus wieder nur auf den senkrecht gegenüberliegenden Punkt des an BB_1 anliegenden Kanales unverändert fortpflanzt u. s. w., so kann man nun behaupten, daß in einer bewegten flüssigen Masse ein an irgend einem Punkte auf dieselbe ausgeübter Druck sich nur in einer Fläche unverändert fortpflanzt, welche durch den gepreßten Punkt geht und zu allen Wegen, welche die Flüssigkeitstheile beschreiben, in ihrem Durchschnittspunkte mit denselben normal steht. Solche Flächen sollen im Folgenden Normalflächen genannt werden. Bezeichnet man zwei Ordinaten eines Punktes dieser Fläche mit x^1 und y^1 und die gleich großen, auf dieselben Axen bezogenen Ordinaten des Kanales, von dem sie in diesem Punkte durchschnitten wird mit x und y, so hätte man wegen dieser senkrechten Stellung der Fläche zu dem Kanale in dem Punkte dessen Ordinaten x^1, y^1 und x, y sind, die Gleichung:

$$\frac{dx^1}{dy^1} = -\frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Es ist klar, daß man das Gesetz der Fortpflanzung des Druckes in ruhigen Flüssigkeiten als einen speziellen Fall des eben Ausgesprochenen ansehen kann; denn die ruhenden Flüssigkeitstheilchen können als solche angesehen werden, die eine unendlich kleine Bewegung und zwar nach irgend einer beliebigen Richtung des ganzen Raumes haben. Da es nun für alle möglichen Bewegungen dieser Art eine Fläche gibt, in welcher sich der Druck gleichmäßig fortpflanzt, mithin kein Punkt in der flüssigen Masse gedacht werden kann, durch welchen nicht eine solche Fläche, für irgend eine zweckmäßige Bewegung der Flüssigkeitstheilchen, geführt werden könnte, so gibt es auch keinen solchen Punkt, nach welchem sich jene Pressung nicht unverändert fortpflanzte.

Nach dem eben Gesagten ist es nun leicht zu bestimmen, um wie viel der Druck der Flüssigkeitstheilchen auf einander zu- oder abnimmt, wenn man von irgend einem Punkte einer solchen, normal zu der Bewegung stehenden Fläche nach einem unendlich nahe liegenden andern Punkte derselben übergeht; denn zu der unveränderten

Pressung des ersten Punktes kömmt nur noch diejenige wegen des Höhenunterschiedes dh beider Punkte und die wegen der Ablenkung der zwischen beiden Punkten liegenden Flüssigkeitstheilchen von der geradlinigen Bewegung, oder die Fliehkraft hinzu. Ist B, Fig. 3, um dh tiefer gelegen als C, so ist wegen der Schwere der Druck auf jede Flächeneinheit bei B um sdh größer als bei C; führt man durch BC eine Ebene, welche die Axe des kleinen durch BC gehenden Flüssigkeitskanales berührt, projizirt dieselbe rechtwinklig darauf und bezeichnet den Krümmungshalbmesser dieser Projektion für den Punkt B mit r und die Projektion der Geschwindigkeit mit v, so wird auf jede Flächeneinheit im Punkte B ein Druck ausgeübt, der wegen der Fliehkraft um $\frac{sBC}{g} \frac{v^2}{r}$ größer ist als der in C. Bezeichnet man BC kurz mit db, den Druck auf jede Flächeneinheit in C mit p und dessen Zunahme im Punkte B mit $\frac{dp\,db}{db}$, so ist daher:

$$\frac{dp\,db}{db} = sdh + \frac{sdb}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

oder wenn man, um anzuzeigen, daß dh sich auf die zwei Endpunkte des Flächenelementes db beziehe, $\frac{dh\,db}{db}$ statt dh schreibt:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dp\,db}{db} = s\frac{dh\,db}{db} + \frac{s}{g} \cdot \frac{v^2}{r}\, db.$$

Der Zusammenhang der Größe db mit den Ordinaten x^1 und y^1 des in der normalen Fläche gelegenen Punktes C wird angegeben durch die Gleichung

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad db^2 = dx^{12} + dy^{12}.$$

Es ist also klar, daß nicht in allen Punkten einer normal zu der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen stehenden Fläche der Druck der Flüssigkeit gleich ist, obschon sich ein, in irgend einem Punkte derselben ausgeübter Druck nach allen Seiten unverändert in ihr fortpflanzt, sowie auch in einer ruhenden Flüssigkeitsmasse nicht alle Punkte die gleiche Pressung erhalten, obschon sich eine solche nach allen Richtungen der ganzen flüssigen Masse unverändert fortpflanzt; denn zu dieser unverändert fortgepflanzten

Pressung kommen von Punkt zu Punkt jener Fläche noch neue, theils von der Schwere, theils von der krummlinigen Bewegung der Flüssigkeitstheilchen herrührende Pressungen hinzu, durch welche die Gesammtpressung an verschiedenen Punkten jener Normalfläche vermehrt oder vermindert werden kann. Bei ruhenden Flüssigkeiten fällt die letzte Ursache einer Pressungsveränderung weg und bleibt nur der Einfluß der Schwere übrig. Jenen Pressungsunterschied zwischen zwei unendlich nahe liegenden Punkten derselben Normalfläche gibt nun aber Gleichung 4 genau an; und es muß nur noch bemerkt werden, daß in derselben dh und r sowohl positiv als negativ sein können. Soll $\frac{dp\ db}{db}$ angeben, um wie viel der Druck in B größer als in C sei, so ist dh positiv, wenn B tiefer liegt als C, negativ im entgegengesetzten Falle; r ist positiv, wenn die Axe des Kanales ihre erhabene Seite gegen B, ihre vertiefte gegen C hin kehrt, oder wenn B weiter vom Krümmungspunkte dieser Axe entfernt ist als C; negativ aber ist r in den entgegengesetzten Fällen.

Auch der durch Gleichung 4 ausgedrückte Satz kann als eine Verallgemeinerung des Fortpflanzungsgesetzes von Pressungen in ruhenden Flüssigkeiten betrachtet werden. Für eine ruhende Flüssigkeit ist nämlich v oder die Geschwindigkeit gleich Null, und zu der an irgend einem Punkte ausgeübten Pressung kann nur durch die Schwere etwas hinzugethan oder davon etwas weggenommen werden, was auch durch Gleichung 4 ausgedrückt wird, indem sie für diesen Fall die Form:

$$dp\frac{db}{db} = s\,\frac{dh\ db}{db}$$

oder weil es gleichgültig ist, nach welcher Richtung hin B von C aus angenommen werde, die Form:

$$dp = sdh$$

annimmt. Daraus ergibt sich für den Druck in einer ruhenden Flüssigkeit unmittelbar die Gleichung:

$$p = sh + \text{Const.}$$

Es kann nun mit Benutzung der durch die Gleichung 1 bis 4

ausgedrückten Sätze die Geschwindigkeit oder Pressung in irgend einem Punkte einer flüssigen Masse durch den Ort desselben und durch andere Größen bestimmt werden, die nothwendig gegeben sein müssen, wenn eine bestimmte Bewegung stattfinden soll; jedoch nur dann, wenn das Gesetz bekannt ist, nach welchem sich der Krümmungshalbmesser r für verschiedene Punkte der flüssigen Masse verändert. Hier tritt nun aber der Fall ein, daß eine genaue Rechnung nicht mehr so leicht durchgeführt werden kann, sondern zur Bestimmung dieser Größe r Annahmen gemacht werden müssen, die zwar der Wahrheit nicht ganz entsprechen, aber, wie man sich überzeugen kann, von ihr auch nicht sehr weit abweichen werden. Indessen wird eine noch etwas weiter fortgesetzte genaue Rechnung immerhin noch einige nicht unwichtige Eigenschaften dieser Größe r kennen lehren.

Ist d, Fig. 4, der Mittelpunkt für die Krümmung abc, d_1 derjenige für die unendlich nahe liegende Krümmung $a_1b_1c_1$ und bezeichnet man da mit r, d_1a_1 mit $r - dr$, so kann man setzen:

$$a_1b_1 = (r - dr)\,\alpha_1 = r\,\frac{r - aa_1}{r}\,\alpha.$$

Nun ist aber:

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{aa_1 - bb_1}{ab} - \frac{bb_1 - cc_1}{bc}$$

$$\text{und: } \alpha = \frac{ab}{r}$$

Setzt man ferner, was immer geschehen kann, $ab = bc = dl$ und in Uebereinstimmung mit den obigen Bezeichnungen $cc_1 = db$, so ist $bb_1 = db + \frac{d.db.dl}{dl} = db + \frac{d^2b\,dl}{dl}$, $aa_1 = db + 2\,\frac{d^2b\,dl}{dl} + \frac{d^3b\,dl^2}{dl^2}$, und man erhält:

$$\alpha_1 = \frac{dl}{r} + \frac{d^3b\,dl^2}{dl^3},\ \alpha = \frac{dl}{r}$$

woraus:

$$(r - dr)\left(\frac{dl}{r} + \frac{d^3b\,dl^2}{dl^3}\right) = \left(1 - \frac{db}{r}\right)dl$$

erhalten wird, indem in dem Werthe von aa_1 die Größen d^2b und

d^3b gegen db weggelassen sind. Durch weitere Ausführung erhält man sogleich:

$$dr = db + r^2 \frac{d^3b.dl}{dl^3}$$

oder um zu bezeichnen, daß sich dr auf die zwei Endpunkte des Bogenstückes db beziehe:

$$\frac{dr\ db}{db} = db + r^2 \frac{d^3b}{dl^3} dl \ldots\ldots (6)$$

Hieraus ergibt sich, daß $\frac{dr\ db}{db}$ gleich db ist, so lange db oder $\frac{d^2b}{dl}$ constante Größen sind; ist dieß nicht der Fall, so ist diese Gleichung zur Bestimmung von r deßhalb nicht hinreichend, weil die in den bisher abgeleiteten Gleichungen noch nicht vorgekommene Größe $\frac{d^3b}{dl^3}$ darin enthalten ist. Bleibt die Dicke db der Kanäle gleich oder nimmt dieselbe mit ihrer Länge gleichförmig zu, so hat man daher immer:

$$\frac{dr\ db}{db} = db, \ r = b + \text{const.}$$

in allen andern Fällen aber wird man genöthigt sein, irgend einen nur angenähert richtigen Ausdruck für r einzuführen.

Es bleibt in Bezug auf diese Größe nur noch zu bemerken übrig, daß man, zur Verbindung derselben mit den Coordinaten der Kanäle x und y, die Gleichung des Krümmungshalbmessers, nämlich:

$$(7) \ldots . r = - \frac{dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\ d^2y}$$

hat.

Diese Gleichungen können nun durch passende Verbindungen mit einander theilweise noch etwas einfachere und zweckmäßigere Gestalten erhalten. — Durch Verbindung von 1 und 2 erhält jene die Gestalt:

$$p_1 - p + sh = \frac{s}{g} \cdot \frac{v^2 - v_1^2}{2}$$

Nimmt man an, die beliebige Querschnittsfläche $C_1B_1D_1 \ldots .$, auf welcher die Pressungen p_1 stattfinden, sei wagrecht, so ist in

dieser Gleichung der Unterschied von h für die beiden Punkte B und C nur gleich dem Höhenunterschiede $dh \frac{db}{db}$ dieser beiden Punkte selbst; ist dagegen $C_1B_1D_1$ nicht eine wagrechte Ebene, so sind auch die Anfangspunkte B_1 und C_1 der Kanäle B und C in ungleicher Höhe. Bezeichnet man diesen Höhenunterschied mit $dh_1 \frac{db}{db}$, so ist der senkrechte Abstand der Punkte C und C_1 um $dh \frac{db}{db} - dh_1 \frac{db}{db}$ größer als jener der Punkte B und B_1. Da dieser Unterschied aber nichts anders als das vollständige Differenziale der Größe h in Bezug auf die verschiedenen Punkte der Normalfläche BCD . . . ist, so hat man, wenn $B_1C_1D_1$ . . . eine horizontale Ebene ist:

$$dh = dh \frac{db}{db}$$

in allen andern Fällen aber:

$$dh = dh \frac{db}{db} - dh_1 \frac{db}{db}$$

Durch Differenzirung dieser Gleichung nach db und Elimination von $\frac{dp\, db}{db}$ und $\frac{dh\, db}{dh}$ mittelst der Gleichung 4, erhält man daher im Allgemeinen:

$$(8) \;.\;.\;.\;.\; \frac{dp_1\, db}{db} = \frac{s}{g}\left(v \frac{dv\, db}{db} - v_1 \frac{dv_1\, db}{db} + \frac{v^2}{r}\, db + g\, dh_1 \frac{db}{db}\right)$$

Ist $B_1C_1D_1$ eine wagrechte Ebene:

$$\frac{dp_1\, db}{db} = \frac{s}{g}\left(v \frac{dv\, db}{db} - v_1 \frac{dv_1\, db}{db} + \frac{v^2}{r}\, db\right)$$

In sehr vielen Fällen kann irgend eine Normalfläche in einer gegebenen, bewegten Flüssigkeitsmasse gefunden werden, auf welcher die Pressung und Geschwindigkeit überall gleich groß sind. Bei einem mit Flüssigkeit gefüllten Gefäße, das eine kleine Ausflußöffnung besitzt, ist z. B. die freie Oberfläche eine solche Normalfläche. Bezieht man nun p_1 und v_1 auf eine solche Fläche, so sind dann

dp_1 und dv_1 gleich Null, und man erhält aus obiger Gleichung:

$$-\frac{1}{v}\frac{dv\,db}{db}=\frac{db}{r}$$

Integrirt man zwischen den der gleichen Normalfläche angehörigen Bogen b und b^1 und nimmt an, daß ihnen beziehungsweise die Geschwindigkeiten v und v^1 entsprechen, so erhält man:

$$(9)\;.\;.\;.\;.\;.\;\log n\,\frac{v}{v_1}=\int_b^{b'}\frac{db}{r}$$

Oft ist es ferner vortheilhaft, die Querschnitte q und q_1 durch db und db_1 auszudrücken. Nimmt man daher an, diese Querschnitte seien gleich d.db und $d_1 db_1$, wo z. B. bei einer rechteckigen Gestalt dieser Querschnitte d und d_1, die senkrecht auf db und db_1 stehenden Seiten dieser Rechtecke bezeichnen, so erhält Gleichung 2 die Gestalt:

$$d.db\;v=d_1 db_1 v_1=\text{const.}\;.\;.\;.\;.\;.\;(10)$$

Aus der Gleichung 8 ergibt sich unmittelbar, daß die relative Geschwindigkeit der Flüssigkeit in verschiedenen Punkten der gleichen Normalfläche unabhängig ist von der Tiefe, in welcher sich diese Punkte unter dem Spiegel der Flüssigkeit befinden, indem bei zunehmender Tiefe sowohl der für als gegen die Bewegung wirkende Druck auf die Flüssigkeit um gleich viel zunimmt; dagegen ergibt sich aus derselben Gleichung, sowie aus Gleichung 9, daß die Geschwindigkeit in einer gegebenen Normalfläche abnimmt, wenn man auf derselben so fortschreitet, daß man die von den Flüssigkeitstheilchen beschriebenen Linien von ihrer hohlen Seite her trifft; daß sie zunimmt, wenn man in entgegengesetzter Richtung auf der Normalfläche fortschreitet; und daß sie in allen Punkten einer Linie gleich ist, die auf einer Normalfläche liegt, und alle oskulirenden Ebenen normal schneidet, welche man an die von den Flüssigkeitstheilchen beschriebenen Curven durch ihre Durchschnittspunkte mit jener Linie legen kann. Sind jene Curven eben, so ist die Geschwindigkeit der Bewegung in einer Flüssigkeit in allen Punkten einer Linie gleich groß, die auf einer Normalfläche liegt und die Ebenen aller jener Curven normal schneidet. Zur Bestimmung der Durchschnittslinie bb_1 mit einer Normalfläche hat man endlich

noch, wenn dieselbe auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem $x^1 y^1$ bezogen wird:

$$\left.\begin{array}{l} dx^1 = db \cos\beta \qquad dy^1 = db \sin\beta \\ d\beta = \frac{b_1 b' - c_1 c}{bc} = \frac{d^2 b}{dl^2}\, dl \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10_a)$$

Im Folgenden mögen alle bisher erhaltenen Endgleichungen, welche zur Bestimmung der Bewegung einer flüssigen Masse dienen können, zusammengefaßt werden:

(11)

$$p_1 - p + sh = \frac{s}{g}\left(\frac{v^2 - v_1^2}{2}\right)$$

$$\frac{dp_1\, db}{db} = \frac{s}{g}\left(v\, \frac{dv\, db}{dh} - v_1\, \frac{dv_1\, db}{db} + \frac{v^2}{r} db + g\, dh_1 \frac{db}{db}\right)$$

oder wenn p_1 und v_1 constant sind, und p_1 sich auf eine wagrechte Ebene bezieht:

$$\log n\, \frac{v}{v^1} = \int_b^{b'} \frac{db}{r}, \quad \frac{dp\, db}{db} = s\, \frac{dh\, db}{db} + \frac{s}{g}\frac{v^2}{r}\, db$$

Ferners:

$$d.db\, v = d_1 db_1 v_1 = \text{const.}$$

$$\frac{dr\, db}{db} = db + r^2 \frac{d^3 b}{dl^3}\, dl$$

$$\frac{dx^1}{dy^1} = -\frac{dy}{dx}$$

$$db^2 = dx^{12} + dy^{12} \qquad dx^1 = db \cos\beta$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \qquad dy^1 = db \sin\beta$$

$$r = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2 y} \qquad d\beta = \frac{d^2 b}{dl^2}\, dl$$

Der Werth für dl ergibt sich aus der Bedeutung von dl, dx und dy von selbst.

Diese Gleichungen sollen nun im Folgenden auf mehrere spezielle Fälle angewendet werden.

Geradlinige Bewegung von Flüssigkeiten.

Für Bewegungen dieser Art muß in obigen Gleichungen überall r unendlich groß angenommen und die Gleichung zur Berechnung von dr und r weggelassen werden, weil von keiner Veränderlichkeit dieser Größe mehr die Rede sein kann. Die erste der obigen Gleichungen bleibt demnach unverändert. In der zweiten könnte, wenn sie ebenfalls auf eine Normalfläche und geradlinige Bewegung bezogen wird, was aber nicht nothwendig ist, der Werth von $\frac{dp_1\ db}{db}$ durch die dritte Gleichung $\frac{dp\ db}{db} = s\ \frac{dh\ db}{db}$ eliminirt und durch $s\ \frac{dh_1\ db}{db}$ ausgedrückt werden. Denn aus dieser letzten Gleichung ergibt sich sogleich, daß bei dieser Art der Bewegung nur durch die Schwere eine Veränderung des Druckes bewirkt werden kann, den die in der gleichen Normalfläche liegenden Flüssigkeitstheilchen auszuhalten haben. Die Richtigkeit dieses Satzes stellt sich auch unmittelbar heraus, sobald man bedenkt, daß in diesem Falle außer der Schwere keine andern i n n e r n Kräfte auf die Flüssigkeit einwirken, während bei krummlinigen Bewegungen zu der Schwere noch die Fliehkraft hinzutritt.

Wenn irgend eine Querschnittsfläche in der bewegten Flüssigkeit vorkömmt, sei es eine Normalfläche oder nicht, in welcher v_1 und die Pressungen p nach der Richtung von v_1 für alle Punkte gleich sind, erhält man die Gleichung:

$$\log n\ \frac{v}{v^1} = o \text{ oder } v = v^1$$

zur Bestimmung der relativen Geschwindigkeit in den verschiedenen Punkten irgend einer andern Normalfläche. Wenn also nur in irgend einer Querschnittsfläche einer flüssigen Masse die Geschwindigkeit und Pressung in allen Punkten gleich ist, so ist die Geschwindigkeit in allen denjenigen Normalflächen, welche geradlinigen Bewegungen aller Flüssigkeitstheile entsprechen, auch constant; mögen nun zwischen diesen beiden Normalflächen auch krummlinige Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen vorkommen oder nicht. Auch dieser Satz laßt sich leicht unmittelbar einsehen. Sind nämlich a_1a und b_1b, Fig. 5, zwei von jenen, durch die einzelnen Flüs-

ſigkeitstheilchen beſchriebenen Elementarkanälen, $a_1 b_1$ und ab zwei Normalflächen, von denen die erſte $a_1 b_1$ lauter gleiche Preſſungen und Geſchwindigkeiten p_1 und v_1 enthält, ſo wird bei a eine gewiſſe Preſſung p und Geſchwindigkeit v herrſchen; bei b aber, da der Annahme zufolge in der Gegend von ab alle Kanäle geradlinig ſein ſollen, wird eine Preſſung herrſchen, die größer iſt als p und zwar um das Gewicht einer Flüſſigkeitsſäule, deren Höhe gleich dem Höhenunterſchiede von a und b iſt. Nun iſt aber der Druck, mit welchem die Schwere die in $b_1 b$ befindliche Flüſſigkeit ſtärker gegen b hin drückt als die in $a_1 a$ befindliche gegen a genau um eben ſo viel größer. Daher bleibt die Geſammtpreſſung, mit welcher jetzt noch die Flüſſigkeit in b nach b_1 hin oder nach der entgegengeſetzten Seite gepreßt wird, genau gleich der in a vorhandenen Preſſung. Da nun, der Annahme zufolge, Preſſung und Geſchwindigkeit der Flüſſigkeit in a_1 und b_1 gleich ſind, ſo muß auch die Geſchwindigkeit in a gleich der in b ſein.

Dieſer Fall tritt nun namentlich überall da ein, wo die flüſſige Maſſe irgendwo einen, wenn auch noch ſo kleinen, ebenen Spiegel beſitzt, durch welchen alle Flüſſigkeitstheile bei ihrer Bewegung mindeſtens einmal gehen müſſen, ſobald nur alle Punkte dieſes Spiegels die gleiche Geſchwindigkeit haben. Die Preſſung iſt nämlich von ſelbſt auf allen Punkten eines ſolchen Spiegels gleich und zwar, wenn ſie nicht durch künſtliche Mittel vermehrt oder vermindert wird, gleich dem Athmosphärendrucke. Wenn alſo Flüſſigkeit von einem Gefäß aus, wo ſie einen offenen Spiegel hat, weiter fließt, immer aber mit neuer Flüſſigkeit erſetzt wird, die in der Nähe dieſes Spiegels in das Gefäß tritt, ſo hat dieſe Flüſſigkeit, wo ſie ſich geradlinig bewegt, in allen Punkten der gleichen Normalflächen gleiche Geſchwindigkeit. Eine geradlinige Bewegung von Flüſſigkeiten tritt nun, wie ſich leicht ergibt, in vielen ſolchen Fällen, wenn nicht ganz genau, doch angenähert ein; und daher iſt dieſer Satz auch auf alle dieſe Fälle angenähert richtig anwendbar. Im Folgenden mögen einige ſpezielle dahin gehörende Fälle näher betrachtet werden. Dem Geſagten zufolge nehmen die unter Nr. 11 angegebenen Gleichungen für dieſe Fälle folgende Geſtalt an:

(12)

$$p_1 - p + sh = \frac{s}{g}\left(\frac{v^2 - v_1^2}{2}\right)$$

$$\frac{dp_1\ db_1}{db_1} = \frac{s}{g}\left(v\,\frac{dv\ db}{db} - v_1\,\frac{dv_1\ db}{db} + g\ dh_1\ \frac{db}{db}\right)$$

$$\frac{dp\ db}{db} = s\,\frac{dh\ db}{db}$$

$v = v^1$ wenn p_1 und v_1 constant sind

$$d\ db\ v = d_1\ db_1\ v_1 = \text{const.}$$

$$\frac{dx^1}{dy^1} = -\frac{dy}{dx}$$

$$db^2 = dx^{12} + dy^{12}, \qquad dl^2 = dx^2 + dy^2$$

Paralelle geradlinige Bewegung von Flüssigkeiten.

Solche Bewegungen entstehen theils in offenen geradlinigen Kanälen, theils in geschlossenen geradlinigen Röhren.

Stellt ab, Fig. 6, einen solchen offenen geradlinigen Kanal vor, der sehr allmählig von einem größern, mit Flüssigkeit angefüllten Becken A herkömmt, um die geradlinige Bewegung der Flüssigkeit nicht zu stören, so ist irgend ein senkrecht zu ab geführter ebener Querschnitt cd eine Normalfläche, indem ein solcher Querschnitt überall senkrecht zu der Bewegung der durch ihn fließenden Flüssigkeit steht. Daher ist die Geschwindigkeit dieser Bewegung in allen Punkten eines solchen Querschnittes gleich groß. Zur Bestimmung dieser Geschwindigkeit hat man nun für ein auf der Oberfläche bei e liegendes Theilchen dieses Querschnittes:

$$p = 1 \text{ Athmosphärendruck.}$$

Ferner kömmt der Elementarkanal, durch welchen sich ein solches Theilchen bewegte, auch von der Oberfläche der in dem Becken enthaltenen Flüssigkeit her, wo ebenfalls

$$p_1 = 1 \text{ Athmosphärendruck ist.}$$

In der ersten der Gleichungen 12 heben sich also p und p_1 für den vorliegenden Fall auf und sie erhält daher die Gestalt:

$$h = \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$$

aus welcher die bekannte Formel

$$13) \ldots\ldots v = \sqrt{2gh + v'^2}$$

folgt. Dieselbe Formel gilt nun aber auch für die Geschwindigkeit jedes andern im Querschnitte cd gelegenen Punktes, so daß auch die durch den Punkt d fließenden Theile dieselbe Geschwindigkeit haben.

Bedeutet ferner h_1 die senkrechte Höhe des Punktes c über irgend einen Punkt e des Querschnittes cd, so ergibt sich für diesen Punkt aus der dritten der Gleichungen 12:

$$14) \ldots\ldots p = sh_1 + \text{Athmosphärendruck},$$

wo p die Pressung des Punktes e bezeichnet.

Dasselbe gilt auch in dem Fall, wo die Flüssigkeit unter einer Schleuse durch, Fig. 7, in einen geradlinigen Kanal von gleichem Querschnitte fließt, für alle Stellen, wo die Bewegung der Flüssigkeit selbst als geradlinig angenommen werden kann, wenn nur für h und alle übrigen vorkommenden Größen die rechten Werthe gesetzt werden.

In der Wirklichkeit werden bekanntlich obige Resultate durch die Reibungen der Flüssigkeitstheilchen an den Kanalwänden und an der Luft modifizirt, so daß sie mit Annäherung nur da anwendbar sind, wo der Einfluß jener Reibungen unbedeutend ist, nämlich bei kleinen Geschwindigkeiten und nahe beim Anfange der Kanäle.

Ganz Aehnliches, wie so eben von einem Querschnitte cd eines offenen geradlinigen Kanals gesagt wurde, läßt sich auch von einem senkrechten Querschnitte einer geschlossenen Röhre behaupten. Bedeutet Q_1, Fig. 8, den Querschnitt des freien obern Spiegels und V_1 die Geschwindigkeit an demselben, q und v dieselben Größen bei cd, so ist $v = V_1 \frac{Q_1}{q}$; ferner ist bekannt daß $h_1 = \frac{v_1^2 - V_1^2}{2g} = V_1^2 \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_1^2}{q_1^2} - 1\right)$, Beziehungen, die sich sämmtlich auch aus obigen Gleichungen ergeben. Hier ist nur vorzüglich darauf hinzuweisen, daß die Geschwindigkeit v in allen Punkten des Querschnittes q durchaus gleich ist, insoferne sie nicht von den Reibungen modifizirt wird, daß dagegen der Druck in den

tieferliegenden Punkten dieses Querschnittes größer ist als bei c, und zwar um das Gewicht einer Flüssigkeitssäule, deren Höhe gleich der senkrechten Höhe des Punktes c über dem betrachteten Punkte ist.

Nicht parallele geradlinige Bewegung von Flüssigkeiten.

Solche Bewegungen finden annäherungsweise in schlank kegelförmigen Gefässen statt, an deren Spitze die Flüssigkeit ausfließt, aber nur in solcher Entfernung von dieser Ausflußöffnung, in welcher die Geschwindigkeit noch klein ist, im Vergleich mit der Ausflußgeschwindigkeit. — Alles was bei parallelen geradlinigen Bewegungen über die Geschwindigkeit in den Normalflächen gesagt worden ist, gilt auch hier, so daß namentlich auch hier jedesmal, wenn irgendwo ein Querschnitt aufgefunden werden kann, in welchem die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen und ihre Pressung nach der Richtung derselben constant ist, alsdann die Geschwindigkeit an allen Punkten irgend einer andern, durch geradlinige Elementarkanäle gehenden Normalfläche, gleich groß ist. Dieß wird daher, ebenfalls wie dort, immer stattfinden, wenn die bewegte Flüssigkeit irgendwo einen freien ebenen Spiegel hat, durch welche alle Flüssigkeitstheilchen bei ihrer Bewegung durchgehen.

Dagegen kann die Gestalt der Normalflächen jetzt nicht mehr, wie früher, eine Ebene sein. Sind abc und $a_1b_1c_1$, Fig. 9, die zwei durchschnittenen Normalflächen einer Flüssigkeit, die sich in con- oder divergirenden geraden Elementarkanälen bewegt, so wird dem Ebengesagten zufolge die Geschwindigkeit in allen Punkten je einer der beiden Flächen gleich sein, wenn die flüssige Masse irgendwo durch einen freien Spiegel geht. Bedeutet q_1 den senkrechten Querschnitt eines solchen Elementarkanales in der Normalfläche $a_1b_1c_1$, q den Querschnitt desselben Kanales in der Normalfläche abc, so muß daher das Verhältniß

$$\frac{q_1}{q} \text{ für alle Kanäle gleich}$$

sein. Wird nun die senkrecht auf der Linie $a_1b_1c_1$ stehende Dimension irgend eines dieser Kanäle mit d_1, die ähnlich liegende

Dimension desselben Kanales bei abc mit d bezeichnet, die in $a_1b_1c_1$ und abc liegenden Dimensionen aber, wie oben, mit db_1 und db, so muß das Verhältniß $\frac{d_1\,db_1}{d\,db}$ für alle Kanäle gleich sein. Ist aber $\frac{d_1}{d}$ für alle Kanäle gleich, so muß daher auch $\frac{db_1}{db}$ für alle Kanäle gleich sein, d. h. ihre Verlängerungen müssen in dem gleichen Punkte C zusammentreffen, oder wie die Radien eines Kreises oder einer Kugel von einem gemeinschaftlichen Punkte ausgehen. Ist dagegen $\frac{d_1}{d}$ für verschiedene Kanäle verschieden, so besitzen sie diese Eigenschaft nicht. Die Durchschnitte $a_1b_1c_1$ und abc der Normalflächen sind in allen Fällen, auf welche dieß Anwendung findet, Kreise. Die Figuren 10, 11 und 12 stellen drei der wichtigsten Fälle dieser Art vor.

Im ersten Falle ist $m_1n_1 = mn$, mithin zwei gegenüberstehende Wände des Gefässes parallel; also auch alle Elementarkanäle parallel mit diesen beiden Flächen, und deßhalb die Normalflächen Theile einer geraden runden Cylinderfläche, deren Axe die Durchschnittslinie CD der beiden nicht parallelen verlängerten Flächen ist. Im zweiten Falle kommen alle vier Kanten des Gefässes im gleichen Punkte C zusammen, wenn man sie hinreichend verlängert, die Verlängerungen der Elementarkanäle daher ebenfalls, und die Normalflächen sind daher Kugelflächen, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Durchschnittspunkt C ist. Der dritte Fall liegt in der Mitte zwischen den beiden vorigen, indem die Kante CD, welche die Durchschnittspunkte von je zwei Kanten des Gefässes verbindet, kleiner als m_1n_1 ist. Die Normalflächen sind daher auch doppelt gekrümmt, wie im zweiten Falle, aber nicht nach allen Seiten gleich stark, wie dort, sondern in der Richtung parallel mit CD weniger als in senkrechter Richtung zu dieser Linie. Dem zweiten und dritten Falle kommen ferner auch noch jene Fälle gleich, in welchen der Querschnitt des Gefässes statt eines Rechteckes ein Kreis oder eine Ellipse ist.

Durch die Gestalt der Normalflächen in einer durch einen runden Trichter, Fig. 13, fließenden Flüssigkeitsmasse erklärt sich auch

die wirbelnde Bewegung, welche gewöhnlich eine solche Flüssigkeit annimmt, wenn ihr Spiegel nicht mehr sehr weit von der Ausflußöffnung entfernt ist.

Da nämlich in diesem Falle die Normalflächen Kugelflächen sind, so lange wenigstens die freie Oberfläche der Flüssigkeit annähernd eine Ebene ist, so haben die in der Mitte a_1 dieser Ebene befindlichen Theile das Bestreben, sich mit größerer Schnelligkeit zu bewegen, als die an den Enden c_1, und zwar um so mehr, je kleiner das Verhältniß von a_1C zu c_1C wird, wenn C der Durchschnittspunkt aller verlängerten Elementarkanäle bedeutet. Daher zeigt auch die Mitte der ebenen Oberfläche immer das Bestreben, im Vergleich zu den Rändern einzusinken und eine Vertiefung zu bilden, was auch ohne Weiteres geschehen würde, wenn nicht, so wie sich dieses Bestreben zu zeigen beginnt, von den Rändern c_1 des Flüssigkeitsspiegels sogleich, vermöge ihrer leichten Beweglichkeit, Flüssigkeitstheilchen nach der Mitte hineinrollten, um die im Entstehen begriffene Vertiefung auszugleichen. So lange nun diese Bewegung ganz genau radial und von allen Theilchen mit derselben Geschwindigkeit erfolgt, werden sie sich gegenseitig in der Mitte zur Ruhe bringen; sowie aber ein Theilchen durch irgend eine störende Ursache zur Seite geschoben wird, und wenn es auch um noch so wenig ist, so müssen auch die Nachbarstheilchen bis auf eine gewisse Entfernung hin diesem Eindrucke im gleichen Sinne nachgeben, und bewegen sich nun nicht mehr genau nach der Mitte der kreisrunden Oberfläche, sondern tangential an irgend ein Kreischen mn, durch irgend einen Punkt m desselben. Dadurch aber wird nun das Gleichgewicht gestört, welches sich die früher genau nach der Mitte hin strömenden Flüssigkeitstheilchen hielten; im Punkte m wird der Stoß im Sinne der abgelenkten Flüssigkeitstheilchen größer geworden sein als früher, weil sie hier nun in größerer Menge vorhanden sind; auf der gegenüberstehenden Seite n wird er nach derselben Richtung hin, wegen Mangel an Flüssigkeit, kleiner sein als früher; damit aber ist eine wirbelnde Bewegung im Sinne der bei m einströmenden abgelenkten Flüssigkeitstheilchen eingeleitet. Sobald dieß aber einmal geschehen, hört sie nicht von selbst wieder auf, denn durch sie werden nun die vom

Rande hereinströmenden Theilchen, sowie sie sich der Mitte nähern, im Sinne der Bewegung selbst abgelenkt, und tragen daher durch ihr erhaltenes Bewegungsmoment zur Unterhaltung, ja bis zu einem gewissen, von der Größe der Reibungen abhängigen Grade, zur Vermehrung der wirbelnden Bewegung bei. Diese begünstigt ihrerseits wieder, durch die wegen ihr entstehende Centrifugalkraft, die in der Mitte sich bildende Vertiefung, wodurch die Geschwindigkeit der von dem Rande hereinströmenden Theilchen vermehrt wird. So erhält sich also diese Drehung der Flüssigkeit, einmal angebahnt, von selbst, und findet ihre Grenzen nur in den Reibungen der Flüssigkeitstheile an den Gefäßwänden, an der Luft und an einander selbst. Der Zustand, in welchem keine Drehung stattfindet, entspricht einem labilen, derjenige der Drehung einem stabilen Gleichgewichte. Unter übrigens gleichen Umständen wird diese Erscheinung um so deutlicher eintreten, je stumpfer der Winkel des kegelförmigen Gefässes bei C ist, weil alsdann die Geschwindigkeit, welche die Mitte des Flüssigkeitsspiegels anzunehmen sucht, um so mehr von der am Rande stattfindenden abweicht; nur darf jener Winkel nicht so stumpf werden, daß die Bewegung der Flüssigkeit nicht mehr als eine geradlinige angesehen werden darf, weil dann andere Bewegungsgesetze eintreten. Ferners wird sie um so deutlicher, je näher der Flüssigkeitsspiegel bei der Ausflußöffnung liegt, weil dann die Geschwindigkeit überhaupt, sowie der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit in der Mitte und an den Rändern des Flüssigkeitsspiegels größer ist.

Demzufolge müßte man in dem oben durch Fig. 10 dargestellten Falle, in welchem zwei Seiten des Gefässes parallel, die beiden andern gegen einander geneigt sind, ein Zusammenströmen der Flüssigkeit auf der Oberfläche bemerken, welches von den schiefen Seiten ausgeht und mit den parallelen parallel wäre, und wodurch dann in der Mitte eine parallel zu den geneigten Flächen gerichtete Stauung entstünde. Eine Wirbelbewegung aber würde hier nicht eintreten.

Die Geschwindigkeit v der Flüssigkeit in irgend einer Normalfläche abc, die mit f bezeichnet werden möge, kann nur bestimmt werden, wenn außer der Pressung, welche die Spiegelfläche aus-

zuhalten hat, auch noch diejenige bekannt ist, welche in irgend einem andern Querschnitte oder einer Normalfläche stattfindet. Hat man dadurch dann die mittlere Geschwindigkeit V_1 der Spiegelfläche F_1 bestimmt, so ist

$$v = V_1 \frac{F_1}{f}$$

und auch die Pressung p auf der Normalfläche ergibt sich durch obige Gleichungen auf bekannte Weise.

Krummlinige Bewegung von Flüssigkeiten.

Da, nach dem über die Bewegung von Flüssigkeiten im Allgemeinen Gesagten, eine krummlinige Bewegung nicht genau bestimmt werden kann, wenn nicht das Gesetz bekannt ist, nach welchem sich der Krümmungshalbmesser der Elementarkanäle für die verschiedenen Punkte der Flüssigkeit verändert, dieses Gesetz genau zu bestimmen aber nicht vollständig gelang, so ist es nothwendig, um wenigstens zu einer angenäherten Bestimmung dieser Bewegungen zu gelangen, an die Stelle des wirklichen noch unbekannten Gesetzes eine Annahme zu stellen, welche voraussichtlich möglichst wenig von dem Gesetze selbst abweicht. Diese, für die verschiedenen vorkommenden Fälle geeigneten Annahmen sollen hier nun vor allem Andern festgesetzt werden.

Ist A, Fig. 14, eine in krummen Elementarkanälen sich bewegende flüssige Masse, mon der Durchschnitt einer ihrer Normalflächen und bezeichnet man den Krümmungshalbmesser des Kanals m_1mm^1 für den Punkt m mit R, den des Kanales n_1nn^1 für den Punkt n mit r, so muß der Krümmungshalbmesser r^1 irgend eines Elementarkanals 0_100^1 in dem Punkte 0, welcher in der Normalfläche mn liegen soll, zwischen R und r liegen, und der Größe R oder r um so näher kommen, je näher o bei m oder n liegt. Ist o in m oder n selbst, so muß r^1 genau den Werth R oder r annehmen. Diesen Eigenschaften entspricht, so lange R nicht sehr groß ist im Vergleich mit r, die Annahme:

$$r^1 = r - \frac{b^1}{b}(r - R)$$

wo b^1 die Länge des Bogens no, b die Länge des Bogens nm

ausdrückt. Wenn aber R sehr groß oder selbst unendlich groß wird, d. h. wenn die Linie m_1mm^1 in m gerade, die Linie n_1nn^1 dagegen bei n immer noch gekrümmt ist, dann wird r^1 nach obigem Ausdrucke auch für einen sehr kleinen Bogen b^1 schon sehr groß, ja für $R = \infty$ auch für jeden endlichen Bogen b^1 selbst unendlich groß, während doch nicht angenommen werden kann, daß die Krümmung der Elementarkanäle schon in der kleinsten Entfernung von n plötzlich aufhöre, im Gegentheil aber das Wahrscheinlichste ist, daß diese Kanäle bis ganz in die Nähe von m eine endliche, allerdings immer kleiner werdende Krümmung behalten und erst bei m selbst vollständig geradlinig werden. Diesen Eigenschaften der Größe r^1 entspricht aber eine zweite Annahme, nämlich die:

$$r^1 = \frac{r}{1 - \frac{(R - r)\, b^1}{R\, b}}$$

welche daher für sehr große Werthe von $\frac{R}{r}$ gemacht werden muß. Dagegen würde diese Annahme wieder für sehr kleine Werthe von $\frac{R}{r}$ nicht passen; denn setzt man in derselben $R = o$, so ist r^1 für alle endlichen Werthe von b^1 ebenfalls gleich Null, was wegen des allmähligen Ueberganges der Größe r^1 von r zu o wieder nicht zugelassen werden kann. Wenn also $\frac{R}{r}$ klein ist, wird man die erste, wenn $\frac{R}{r}$ groß ist, die letzte Annahme zur Bestimmung von r^1 machen können.

Wenn sich R nicht viel von r unterscheidet, gibt die eine und andere Annahme nahezu dieselben Werthe von r^1; deßhalb ist es auch kaum nöthig, eine bestimmte Grenze anzugeben, bis zu welcher die eine oder andere Annahme anwendbar ist. Größerer Bestimmtheit wegen mag jedoch im Folgenden stets angenommen werden, die erste Annnahme gelte, wenn $\frac{R}{r} < 1$ und die zweite, wenn $\frac{R}{r} > 1$, wobei aber dem Gesagten zufolge immer festzuhalten ist, daß beide Annahmen gemacht werden dürfen, wenn $\frac{R}{r}$ in der Nähe von 1 ist.

Zur Bestimmung der relativen Geschwindigkeit in der gleichen Normalfläche ist nun oben, unter der Voraussetzung, daß in irgend einem Querschnitte der Flüssigkeit p_1 und v_1 constant seien, die Gleichung abgeleitet worden:

$$\log n \frac{v}{v^1} = \int_b^{b'} \frac{db}{r}$$

Nimmt man an, die Geschwindigkeiten v und v^1 entsprechen den Punkten n und o der vorigen Figur und der Elementarkanal $n_1 n n^1$ bilde auf der einen Seite die Grenzlinie der Flüssigkeit, oder liege auf ihrer Oberfläche, so ist dann $b = o$. Führt man endlich noch für r die beiden Annahmen für den Werth von r^1 ein und führt das Integrale aus, so erhält man:

für die erste Annahme: $$\frac{v}{v^1} = \left(1 + \frac{R-r}{r\,b}\,b^1\right)^{\frac{b}{R-r}}$$

für die zweite Annahme: $$\log n \frac{v}{v^1} = \frac{R b b^1 + \frac{1}{2}(r-R) b^2}{r R b}$$

Ist $\frac{v}{v^1}$ nur wenig mehr als Eins, so kann für die zweite Annahme auch angenähert gesetzt werden:

$$\frac{v}{v^1} = 1 + \frac{R b b^1 + \frac{1}{2}(r-R)\, b^{12}}{r R b}$$

Diese Gleichungen sind, wie man sieht, geeignet, die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in irgend einem Punkte o einer Normalfläche mon zu bestimmen, wenn die Geschwindigkeit v des äußersten auf der concaven Seite der flüssigen Masse liegenden Elementarkanales, der Krümmungshalbmesser dieses äußersten und noch eines andern Elementarkanales, zwischen denen der Punkt o gelegen ist, und endlich die Länge der Bogen b und b^1 bekannt sind. Zur Bestimmung der Gestalt der Linie mon sind die allgemeinen Gleichungen in Nr. 11 ebenfalls nicht hinreichend, weßhalb auch dazu passende angenäherte Annahmen gemacht werden müssen. Größerer Einfachheit wegen soll angenommen werden, die Abszissenaxe x^1, Fig. 15, auf welche die Coordinaten der Linie nom bezogen werden soll, sei parallel mit der durch m an mon, und die Coordinatenaxe daher parallel mit der durch m an den Elementarkanal

m_1mm^1 gezogenen Tangente. Alsdann ist für den Punkt m der Winkel $\beta = o$, für n hat er einen gewissen endlichen Werth β, und für irgend einen Punkt o, der um den Bogen no oder b^1 von n entfernt ist, muß er einen Werth β^1 besitzen, der zwischen β und o enthalten ist. Man wird daher die angenäherte Annahme machen können:

$$\sin \beta^1 = \frac{R - r^1}{R - r} \sin \beta$$

wo r^1, r und R wie oben die Krümmungshalbmesser der Elementarkanäle in o, n und m bezeichnen. Diese Annahme entspricht auch noch folgender Eigenschaft, die der Winkel β^1 besitzt. Ist R sehr groß und nähert sich r^1 im Punkte o schon sehr stark dieser Größe, so muß auch β^1 schon sehr nahe gleich Null sein, was offenbar bei obiger Annahme eintrifft. Dieselbe wird daher der Wahrheit näher kommen, als wenn sin β etwa mit $b - b^1$ proportional gesetzt würde, weil β^1 eher mit der Größe $R - r^1$ im gleichen Verhältnisse wächst und abnimmt. Man hat daher nun:

$$dx^1 = db.\cos \beta^1 = db \sqrt{1 - \left(\frac{R - r^1}{R - r}\right)^2 \sin^2 \beta}$$

$$dy^1 = db.\sin \beta^1 = db \frac{R - r^1}{R - r} \sin \beta$$

Für die erste Annahme von r^1 erhält man ferner:

$$dx^1 = db \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^1}{r}\right)^2 \sin^2 \beta},$$

$$dy^1 = db \left(1 - \frac{b^1}{r}\right) \sin \beta$$

Für die zweite Annahme:

$$dx^1 = db \sqrt{1 - \frac{R^2 (b - b^1)^2 \sin^2 \beta}{[R (b - b^1) + r b^1]^2}}$$

$$dy^1 = db \frac{R (b - b^1) \sin \beta}{R (b - b^1) + r b^1}$$

Ist dagegen die Bewegung des Bogens mon nur unbedeutend, so kann derselbe allerdings als Kreisbogen angesehen werden. Bezeichnet R den Halbmesser desselben, so ist dann

$$\beta = \frac{b}{R},\ \beta^1 = \frac{b - b^1}{R}$$

$$x^1 = R \sin \frac{b - b^1}{R},\ y^1 = R\left(1 - \cos \frac{b - b^1}{R}\right)$$

Folgendes sind daher die zur Bestimmung der Geschwindigkeiten v und v^1 und der Länge der Normalfläche mon anwendbaren Gleichungen:

(12b)

$$1)\ p_1 - p + sh = \frac{s}{g} \frac{v^2 - v_1^2}{2}$$

$$2)\ \frac{v}{v^1} = \left(1 + \frac{R - r}{r\,b} b^1\right)^{\frac{b}{R - r}}, \text{ wenn } \frac{R}{r} \text{ kleiner als 1 ist.}$$

$$3)\ \log n \frac{v}{v^1} = \frac{R\,b b^1 + \frac{1}{2}(r - R)\, b^{12}}{r\,R\,b}$$

$$4)\ \frac{v}{v^1} = 1 + \frac{R\,b b^1 + \frac{1}{2}(r - R) b^{12}}{r\,R\,b}$$

wenn $\frac{R}{r}$ größer als 1 ist.

$$5)\ d\, db\, v = d_1\, db_1\, v_1 = \text{const.}$$

$$6)\ dx^1 = db \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^1}{r}\right)^2 \sin^2 \beta}$$

$$7)\ dy^1 = db \left(1 - \frac{b^1}{r}\right)^2 \sin \beta$$

wenn $\frac{R}{r}$ kleiner als 1 ist.

$$8)\ dx^1 = db \sqrt{1 - \frac{R^2 (b - b^1)^2 \sin^2 \beta}{[R(b - b^1) + r b^1]^2}}$$

$$9)\ dy^1 = db \frac{R\,(b - b)^1 \sin \beta}{R\,(b - b^1) + r b^1}$$

wenn $\frac{R}{r}$ größer als 1 ist.

$$10)\ x^1 = R \sin \frac{b - b^1}{R},\quad 11)\ y^1 = R\left(1 - \cos \frac{b - b^1}{R}\right)$$

$$12)\ R = \frac{b}{\beta},\quad 13)\ \frac{dx^1}{dy^1} = -\frac{dy}{dx},\quad 14)\ dx^{12} + dy^{12} = db^2$$

$$15)\ r = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\ d^2y},\quad 16)\ dx^2 + dy^2 = dl^2.$$

Wenn nun diese Gleichungen auch nicht immer zu einer vollständigen Bestimmung der Bewegung einer flüssigen Masse hinreichend

oder geeignet sind, so bilden sie doch die Grundlage, auf welche sich die Betrachtung jedes einzelnen Falles stützen muß, und von welcher aus dann mit Hülfe spezieller, für jeden dieser Fälle passender Annahmen, die Berechnung weiter fortgeführt werden kann. Durch die Gleichung 1 wird die bekannte Beziehung zwischen der Geschwindigkeit, den Pressungen, dem Gefälle und dem spezifischen Gewichte einer Flüssigkeit ausgedrückt; die Gleichungen 2, 3 und 4 geben die relative Geschwindigkeit, die eine Flüssigkeit in irgend einem Punkte einer Normalfläche besitzt, der dem Bogen b^1 entspricht. Dazu müssen aber die jener Normalfläche entsprechenden Größen b, r und R bekannt sein. R ist nun in sehr vielen Fällen der Krümmungshalbmesser einer Gefäßwand, und mithin bekannt, b kann sehr oft mit Zuhülfenahme der Gleichung 5 durch r, R und bekannte Größen bestimmt werden, r endlich läßt sich in einigen Fällen durch die Gleichung 12 vortheilhaft eliminiren, in andern durch spezielle Annahmen annäherungsweise bestimmen, so daß es in vielen Fällen gelingt, jene relative Geschwindigkeit annäherungsweise vollständig zu bestimmen. Diese drei Gleichungen 2, 3 und 4 stützen sich, außer auf die bekannte durch Gleichung 1 und 5 ausgedrückten Beziehungen, auf den Einfluß, welchen die in krummen Kanälen sich bewegenden Flüssigkeitstheilchen durch ihre Fliehkraft auf ihre Bewegung gegenseitig ausüben. Mit Hülfe der Gleichung 5 kann in vielen Fällen die Länge des Bogens b durch bekannte Größen bestimmt werden. Die Gleichungen 6—16 dienen zur nähern Bestimmung der Gestalt der Linie b, und einige von ihnen können namentlich zur Bestimmung der in der Gleichung 5 vorkommenden Größen d und d_1 oft vortheilhaft benutzt werden.

Es sollen nun einige einzelne Fälle von krummlinigen Flüssigkeitsbewegungen näher betrachtet werden.

Bewegung eines rechteckigen gekrümmten Flüssigkeitsstrahles. Fig. 16.

Es wird darunter ein Wasserstrahl verstanden, dessen Querschnitt ein Rechteck ist; die Kanten dieses Strahles sollen ferner ebene krumme Linien sein, zwei Seiten jenes Rechteckes senkrecht auf den Ebenen dieser krummen Linien stehen und im ganzen Strahl die gleiche Größe beibehalten. Es wird später darauf Rücksicht genommen werden, wo dieser Fall in der Anwendung vorkömmt, einstweilen kann man sich denselben dadurch verwirklicht denken, daß man den Strahl zwischen zwei parallelen Ebenen fließen läßt, welche durch eine gekrümmte, senkrecht auf ihnen stehende Wand verbunden seien, die den Wasserstrahl auf seiner erhabenen Seite umfasse, während er auf der vertieften frei sei. Jene beiden parallelen Ebenen sollen ferners horizontal angenommen werden, so daß der Einfluß der Schwere vernachläßigt werden kann.

Ist ABC, Fig. 16, ein solcher Strahl, und D dessen rechteckiger Querschnitt, so sind die Querschnitte der Elementarkanäle auch wieder Rechtecke, mit der gemeinschaftlichen Höhe d des Wasserstrahles und unendlich kleiner Breite. Jene Höhe bleibt für jeden Elementarkanal durch die ganze Länge des Wasserstrahles gleich, während dagegen die Dicke db verschiedene Werthe annimmt. Die in den Gleichungen 12_b mit d und d_1 bezeichnete Größe ist daher für diesen Fall eine constante. Es soll ferner angenommen werden, daß in irgend einem Querschnitte $m_1 n_1$ des Strahles, bei welchem derselbe noch geradlinig ist, die Geschwindigkeit in jedem Elementarkanale gleich v_1 und die Pressung gleich p_1 sei. Sind nun für irgend eine andere Normalfläche mn die Geschwindigkeit, Pressung und der Krümmungshalbmesser bei n gleich v, p und r, dieselben Größen bei m gleich V, P und R und bei o gleich v^1, p^1, r^1, und bezeichnet man die Länge der Bogen mn und on mit b und b^1, so hat man zufolge den allgemeinen Gleichungen 12_b:

$$(13_1) \text{ aus der 1ten Gleich.: } v = \sqrt{\frac{2g}{s}(p_1 - p) + v_1^2}$$

(13₂)

aus der 2ten Gleich.: $v^1 = v\left(1+\frac{R-r}{rb}b^1\right)^{\frac{b}{r-R}}$ und:

$V = v\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{b}{r-R}}$, wenn $\frac{R}{r}$ kleiner als 1 ist.

aus d. 4ten Gl.: $v^1 = v\,\frac{rRb}{rRb+Rbb^1+\frac{1}{2}(r-R)b^{12}}$ und:

$V = \frac{vRr}{rR+\frac{1}{2}(r+R)b}$, wenn $\frac{R}{r}$ größer als 1 ist.

Aus der 5ten Gleich.: $db^1 v^1 = db_1 v_1 = \text{const.}$

Zur Bestimmung von b^1 und b erhält man durch Elimination von v^1 aus den drei letzten Gleichungen:

$A\,db_1 = db^1\left(1-\frac{r-R}{rb}b^1\right)^{\frac{b}{r-R}}$, wenn $\frac{R}{r}$ kleiner als 1 ist.

$A.db_1 = db^1\frac{rRb}{rRb+Rbb_1-\frac{1}{2}(R-r)b^{12}}$, wenn $\frac{R}{r}$ größer als 1 ist,

indem $v_1 = A\,v$ gesetzt wurde, wo zufolge Gleichung 1

$$A = \sqrt{1-\frac{2g\,(p_1-p)}{v^2}}$$

zu rechnen ist. Bezeichnet man den Bogen n_1o_1, der dem Bogen no oder b^1 entspricht, mit $b_1{}^1$, und integrirt diese beiden Gleichungen zwischen den Grenzen o und $b_1{}^1$ auf der linken und o und b^1 auf der rechten Seite, so erhält man:

(13₃)

$$A.b_1{}^1 = \frac{rb}{b+r-R}\left\{1-\left(1-\frac{r-R}{rb}b^1\right)^{1+\frac{b}{r-R}}\right\}$$

wenn $\frac{R}{r}$ kleiner als 1 ist.

$$A\,b_1{}^1 = \frac{rRb}{\sqrt{R^2b^2+2rRb\,(R-r)}}\;\log n\,\frac{[Rb-(R-r)\,b_1-B]\;[Rb+B]}{[Rb-(R-r)\,b^1+B]\;[Rb-B]}$$

wenn $\frac{R}{r}$ größer als 1 ist.

In der letzten Gleichung ist:

$$B = \sqrt{R^2b^2 + 2rRb\,(R - r)}.$$

Macht man in diesen Gleichungen $b^1 = b$ und $b_1{}^1 = b^1$, so erhält man zur Bestimmung von b durch b_1 oder von b_1 durch b:

$$(13_4)\left\{\begin{array}{l} Ab_1 = \frac{r\,b}{b + r - R}\left\{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{1+\frac{b}{r-R}}\right\} \\ \text{wenn } \frac{R}{r} \text{ kleiner als 1 ist.} \\ Ab_1 = \frac{rRb}{B} \log n \frac{(rb - B)\,(Rb + B)}{(rb + B)\,(Rb - B)} \\ \text{wenn } \frac{R}{r} \text{ größer als 1 ist,} \end{array}\right.$$

wo in der zweiten Gleichung B die obige Bedeutung hat. Zur Bestimmung der Pressung, welche bei dem Punkte o auf jede Flächeneinheit der Flüssigkeit ausgeübt wird, hat man aus Gleichung 13:

$$(13_5)\left\{\begin{array}{l} p^1 = p_1 + s\,\frac{v_1{}^2 - v^{12}}{2g} \\ \text{und für die Pressung P bei m:} \\ P = p_1 + s\,\frac{v_1{}^2 - V^2}{2g} \end{array}\right.$$

Unter der Voraussetzung, daß bekannt sei:

p_1 und v_1, die Pressung und Geschwindigkeit im Querschnitte m_1n_1,

p, die Pressung im Punkte n,

R und r, die Krümmungshalbmesser der beiden äußersten Elementarkanäle in m und n,

kann daher nun berechnet werden:

v, oder die Geschwindigkeit bei n, durch Gleichung 13, 1,

b_1 durch b, oder $b_1{}^1$ durch b^1, oder die Breite des Strahles an der einen Stelle durch die an der andern, mittelst der Gleichungen 13_4 und 13_3,

v^1 und V, die Geschwindigkeit an irgend einer Stelle o, oder beim Punkte m der Normalfläche durch Gleich. 13, 2 und
p^1 oder P, die Pressung an irgend einem Punkte o, oder beim Punkte m der Normalfläche durch Gleich. 13, 5.
Die Gleichungen 13_2 bestätigen zunächst den früher allgemein ausgesprochenen Satz, daß in einer flüssigen Masse die Geschwindigkeit an den, näher bei der hohlen Seite ihrer Krümmung liegenden Punkten, größer sei, als an den näher bei der erhabenen Seite liegenden, indem hier durch die Centrifugalkraft ein größerer Gegendruck ausgeübt wird als dort. Denn je größer in jenen zwei Gleichungen b^1 angenommen wird, um so kleiner wird v^1. Am größten ist dieser Werth, wenn $b^1 = o$, d. h. an der hohlen Oberfläche des Strahles selbst, nämlich gleich v; am kleinsten aber an der erhabenen Oberfläche, nämlich gleich V. Ferner zeigt sich, daß V um so kleiner ist als v, je kleiner die Krümmungsradien r und R sind; je rascher also der Strahl genöthigt wird sich zu krümmen, um so mehr wird seine Bewegung an der erhabenen Seite der Krümmung aufgehalten, während dieß auf die hohle Seite keinen Einfluß ausübt.

Nimmt man ferner an, die beiden Pressungen bei m_1n_1 und bei n seien gleich, was z. B. der Fall ist, wenn der Strahl auf der hohlen Seite die freie athmosphärische Luft berührt, so ist die Geschwindigkeit v auf der hohlen Seite des Strahles, nach Gleichung 13_1, überall gleich v_1. Da nun V kleiner als v oder v_1, mithin die mittlere Geschwindigkeit bei mn überhaupt kleiner ist als bei m_1n_1, so muß daher die Dicke mn größer sein als die Dicke m_1n_1, und dieß um so mehr, je rascher der Strahl gekrümmt wird. Wo daher ein solcher Wasserstrahl genöthiget wird, sich zu biegen, ist er stets dicker als an den Stellen, wo er sich geradlinig fortbewegt. Die Gleichungen 13_4 geben genau das Verhältniß dieser beiden Dimensionen an. Endlich geben die Gleichungen 13_5 die von dem Wasserstrahl auf die hohle Wand des Kanales ausgeübte Pressung an, woraus hervorgeht, daß dieselbe ebenfalls in irgend einem gegebenen Punkte um so größer ist, je kleiner V oder je rascher die Biegung des Strahles ist.

Verfolgt man den Wasserstrahl seiner Länge nach, so findet

man also, daß er an verschiedenen Stellen eine verschiedene Dicke hat, die namentlich von R und r abhängt. Ist an irgend einer Stelle R kleiner als an einer zweiten, so ist b an der ersteren größer als an der andern, selbst wenn r in beiden Fällen gleich wäre. Nun nehme man an, daß irgendwo zwei Stücke der Linie ABC mit verschiedenen Krümmungshalbmessern R zusammenstoßen, daß z. B. der Krümmungshalbmesser von BA, Fig. 17, gleich R, der von BC gleich R_1 wäre. Alsdann müßte die Dicke des Strahles auf dem Bogen BA der Krümmung R, die auf dem Bogen BC der Krümmung R_1 entsprechen. Da nun ferner nicht wahrscheinlich ist, daß der Krümmungshalbmesser r an zwei unendlich nahe liegenden Punkten der hohlen Fläche des Strahles zwei um eine endliche Größe von einander verschiedene Werthe haben sollte, so wird auch der Krümmungshalbmesser der Linie nn_1 bei n nur um sehr wenig von dem der Linie nn^1 in der Nähe des gleichen Punktes n verschieden sein. Deßhalb aber muß, nach obigen Gleichungen, der Bogen mon für den Strahl auf AB einen ganz andern Werth haben, als derselbe Bogen für den Strahl auf BC; es würde also hier eine plötzliche Querschnittsveränderung des Strahles eintreten, wodurch die ganze Bewegung des Strahles eine plötzliche, stoßweise Aenderung erleiden müßte. Auch selbst wenn r plötzlich beim Uebergange von n_1n zu nn^1 einen andern und zwar einen solchen Werth annähme, daß nach obigen Gleichungen die Länge von mon für beide Hälften des Strahles gleich groß ausfallen würde, so könnte der Strahl beim Durchgange durch diesen Querschnitt den bisher festgehaltenen Voraussetzungen und entwickelten Gesetzen dennoch nicht folgen. Ist der Krümmungshalbmesser des Bogens BA bei m, Fig. 17, gleich R_1 und kleiner als der Krümmungshalbmesser R des Bogens BC bei demselben Punkte m, so muß also, wenn für beide Bogen der Querschnitt mon gleich groß sein soll, der Krümmungshalbmesser r_1 für den Bogen nn^1 größer sein als der mit r bezeichnete des Bogens nn_1. Untersucht man nun die Pressung, welche in diesem Falle in einem Punkte der Normalfläche, der nahe bei n gelegen sei, stattfindet, so überzeugt man sich sogleich, daß dieselbe auf der Seite von nn_1 größer sein muß, als auf der Seite von nn^1, indem die Krümmung der in der Nähe von nn_1 gele-

genen Elementarkanäle viel rascher ist, als die derjenigen, welche in der Nähe von nn^1 liegen, die in denselben herrschende Geschwindigkeit aber ganz in der Nähe von n auf beiden Seiten dieses Punktes gleich v ist, wenn keine plötzliche Geschwindigkeitsänderung eintreten soll. Bei dieser Annahme müßte daher die Flüssigkeit beim Durchgange durch den Punkt o eine plötzliche Veränderung des Druckes erleiden. Dieß aber würde eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung zur Folge haben. Die Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit beim Durchgange neben dem Punkte n sich nur allmählig verändere, ist also auch in diesem Falle nicht zuläßig.

Es folgt also hieraus, daß der Wasserstrahl, sobald seine erhabene Fläche genöthiget wird, ihren Krümmungshalbmesser plötzlich zu ändern, auch eine plötzliche Bewegungsveränderung erleiden muß. Dieselbe irgendwie näher zu bestimmen, wäre blos mit Anwendung der bisher entwickelten Grundsätze nicht mehr möglich; nur das kann behauptet werden, daß in Folge einer solchen Veränderung jedenfalls ein Verlust an lebendiger Kraft erfolgen müßte. Es ist zwar wohl zu bemerken, daß in gewissem Sinne auch bei der hier vorausgesetzten allmähligen Bewegungsveränderung ein Theil der lebendigen Kraft der Flüssigkeit wenigstens auf einige Augenblicke verloren geht; denn da die Geschwindigkeit V bei m kleiner ist als v_1 bei m_1, so ist auch die lebendige Kraft der Flüssigkeit im Querschnitte mon kleiner als in m_1n_1. Denkt man sich aber den Strahl fortgesetzt, bis er wieder, wie in m_1, geradlinig geworden ist, so wird dort auch die Geschwindigkeit v_1 wieder ohne alle Veränderung zurückgekehrt und damit auch die vorige lebendige Kraft wieder erlangt worden sein. Jener Verlust ist also nur ein augenblicklicher, vorübergehender, ja man kann selbst sagen nur ein scheinbarer. Denn angenommen, man wollte den Kanal bei mon, wo der Strahl gegenwärtig gerade die kleinste Geschwindigkeit haben mag, abschneiden, so könnte man auf den ersten Blick glauben, die Flüssigkeit würde nun diese kleine Geschwindigkeit beibehalten, nur mit dieser den Kanal verlassen, und mithin während ihrer Bewegung durch denselben einen Theil ihrer Geschwindigkeit und lebendigen Kraft verloren haben. Untersucht man aber näher, so wird man sich überzeugen, daß

dieß keineswegs der Fall sein kann, sondern daß im Gegentheil alsdann die Geschwindigkeit bei mn oder in der Nähe von diesem Querschnitte sogleich auf die ursprüngliche Höhe steigen würde, die sie bei m_1n_1 besaß. Dieß geht theils schon daraus hervor, daß der Flüssigkeitsmasse mn n_1m_1 nun kein Gegendruck mehr von der folgenden Flüssigkeitsmasse mn n^1m^1 entgegengesetzt würde, wird aber später noch schärfer dargelegt werden können. Man kann also behaupten, daß eine Verminderung an lebendiger Kraft in irgend einem Punkte eines gekrümmten Flüssigkeitsstrahles nur dann eintreten kann, wenn nach diesem Punkte solche Stellen kommen, an denen die ursprüngliche Geschwindigkeit und lebendige Kraft wieder eintreten kann, und daß es daher in dem Wesen einer solchen Verminderung liegt, nur augenblicklich und vorübergehend zu sein, und nur da zu entstehen, wo auch sogleich die Nothwendigkeit für sie eintritt, wieder zu verschwinden.

Die jetzt besprochenen Fälle dürfen jedoch nicht mit dem Falle verwechselt werden, wo die Flüssigkeit durch eine gekrümmte Röhre strömt, der, obschon nur wenig von dem vorliegenden verschieden, dennoch allerdings einen wirklichen Verlust an lebendiger Kraft veranlaßt, wie später auch theoretisch nachgewiesen werden soll.

In Betreff des vorliegenden Falles kann dagegen noch die Folgerung aus dem Vorhergehenden gezogen werden, daß, um alle plötzlichen Störungen in der Bewegung des Wasserstrahles zu vermeiden, seine Krümmung überall nur allmählig geändert werden darf, so daß nie zwei Bogen unmittelbar auf einander folgen, deren Krümmungshalbmesser um eine endliche Größe von einander verschieden sind. Somit wären z. B. sämmtliche Kegelschnittslinien geeignet, als Leitkanäle eines Wasserstrahles zu dienen, dagegen müßte derselbe beim unmittelbaren Uebergange von einer geraden Linie in einen Kreisbogen mit endlichem Krümmungshalbmesser eine Störung in seiner Bewegung erleiden.

Die obigen Ausdrücke für die Größe v^1, b, b^1, p^1 u. s. w. nehmen nun verschiedene Gestalten an, je nachdem namentlich die beiden Krümmungshalbmesser R und r in verschiedenen Verhältnissen zu einander stehen. Es mögen daher einige der wichtigsten Fälle näher untersucht werden.

Beide Krümmungshalbmesser sind gleich, oder $R = r$.

Man kann in diesem Falle sowohl die Formeln brauchen, die für ein kleines, als auch die, welche für ein großes R passen, denn beide geben immer $r^1 = r$, und daher durchgehends gleiche Endresultate.

Gleichung 13_1 bleibt für diesen Fall unverändert. Um die Ausdrücke für die Geschwindigkeit v^1 und V zu erhalten, geht man am besten zur ursprünglichen Gleichung zurück, durch welche diese Größen bestimmt wurden, nämlich der Gleichung:

$$\log n \frac{v}{v^1} = \int_b^{b'} \frac{db}{r}$$

Da für den gegenwärtigen Fall nur $r = R$, $b = o$ zu setzen ist, so ergibt sich sogleich:

$$v^1 = v \frac{1}{e^{\frac{b^1}{R}}}, \quad V = v \frac{1}{e^{\frac{b}{R}}}$$

Durch Elimination von v und v^1 durch Gleichung 12, 5, wenn zugleich, wie bei Ableitung der Gleichung 13, 3 $v_1 = Av$ gesetzt wird, erhält man:

$$A\, db_1 = \frac{db^1}{e^{\frac{b^1}{R}}}$$

woraus, durch Integration zwischen den Grenzen $o_1 b_1^1$ und ob^1:

$$A\, b_1^1 = R\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{b^1}{R}}}\right)$$

oder für die ganze Dicke des Strahles:

$$A\, b_1 = R\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{b}{R}}}\right)$$

Da die Gleichungen, welche im gegenwärtigen Falle denjenigen unter 13, 5 entsprechen, ebenfalls unverändert bleiben, so hat man zur Bestimmung der Bewegung dieses Falles folgende Gleichungen:

$$
(14)\left\{
\begin{array}{ll}
1) \ldots v = \sqrt{2g(p_1 - p) + v_1^2} & \\
2) \ldots v^1 = \dfrac{v}{e^{\frac{b^1}{R}}},\quad V = \dfrac{v}{e^{\frac{b}{R}}} & \\
3) \ldots A b_1^1 = R\left(1 - \dfrac{1}{e^{\frac{b^1}{R}}}\right) & \multirow{2}{*}{\text{worin } A = \dfrac{v_1}{v}} \\
4) \ldots A b_1 = R\left(1 - \dfrac{1}{e^{\frac{b}{R}}}\right) & \\
5) \ldots p^1 = p_1 + s\,\dfrac{v_1^2 - v^{12}}{2g},\quad P = p_1 + s\,\dfrac{v_1^2 - V^2}{2g} &
\end{array}
\right.
$$

Aus der dritten und vierten dieser Gleichungen erhält man auch noch zur Bestimmung von b^1 und b:

$$(14_6) \ldots b^1 = R \log n \frac{R}{R - Ab_1^1}$$

$$(14_7) \ldots b = R \log n \frac{R}{R - Ab_1}$$

Aus den Gleichungen 14, 2 sieht man nun, daß das Verhältniß der Geschwindigkeit V an der erhabenen Fläche zu der mit v bezeichneten in der hohlen Fläche nicht von der absoluten Dicke des Wasserstrahles, oder von der absoluten Größe des Krümmungshalbmessers abhängig ist, sondern von dem Verhältnisse dieser beiden Größen zu einander. Ist z. B. b der 5te, 10te, 50ste, 100ste Theil von R, so ist die Geschwindigkeit an der erhabenen Fläche 0,81873, 0,90484, 0,98019, 0,99004 von derjenigen an der hohlen Fläche. Ebenso hängt auch das Verhältniß der Dicke b des Strahles zu der Dicke b_1 desselben, in der Voraussetzung, daß die Pressungen p und p_1 gleich sein sollen, von dem Verhältnisse der Dicke b zum Krümmungshalbmesser R ab. Ist R im Vergleiche mit b sehr groß, so ist b_1 nur wenig kleiner als b, sowie aber R verhältnißmäßig klein wird, nimmt auch b im Vergleich mit b_1 zu. Ist auch wieder b der 5te, 10te, 50ste oder 100ste Theil von R, so ergibt sich aus Gleichung 13, 4, wo alsdann A = 1 ist, daß b_1 gleich 0,90635.b, 0,9516.b, 0,9905.b

und 0,996.b ist. Setzt man die Dicke des Strahles gleich dem Krümmungshalbmesser selbst, so erhält man: $V = 0{,}36788\,v$ und $b_1 = 0{,}63212\,b$. Da endlich der Unterschied der beiden Pressungen p_1 und P bei m_1 und m zufolge der Gleichung 14, 5 ebenfalls vom Unterschiede der beiden Geschwindigkeiten v_1 und V, dann aber auch von ihrer absoluten Größe abhängig ist, indem $v_1^2 - V^2 = (v_1 - V)(v_1 + V)$ gesetzt werden kann, so nimmt jener Unterschied auch zu, wenn das Verhältniß von b zu R zunimmt, aber außerdem auch mit der Geschwindigkeit, welche die Flüssigkeit überhaupt besitzt. Setzt man wegen $p_1 = p$ auch $v_1 = v$, und führt den in Gleichung 14, 2 angegebenen Werth von V in den Ausdruck für P, Gleichung 14, 5 ein, so erhält man:

$$P = p_1 + s\,\frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2b}{R}}}\right)$$

Da nun aber

$$\frac{1}{e^{\frac{2b}{R}}} = 1 - \frac{2b}{R} + \frac{4b^2}{1.2.R^2} - \frac{8b^3}{1.2.3R^3} + \ldots .$$

so kann der Ausdruck für P, wenn $\frac{b}{R}$ so klein ist, daß die zweite und alle höheren Potenzen dieser Größe gegen die erste weggelassen werden können, leicht in folgende Form gebracht werden:

$$P = p_1 + s\,\frac{v^2 b}{gR}$$

welches mit der gewöhnlich zur Berechnung dieses Druckes angenommenen Formel übereinstimmt. Man sieht nun, daß dieser Ausdruck etwas zu große Resultate gibt, indem die oben von dem genaueren Werthe weggelassenen Glieder eine negative Größe ausmachen. Führt man in obigen genauen Ausdruck für p^1 und P, sowie in die Ausdrücke für v^1 und V auch noch die durch Gleichung 14, 6 und 14, 7 angegebenen Werthe von b^1 und b ein, so erhält man:

$$(14)\begin{cases} 8) \ldots\ldots v^1 = v\left(1 - A\dfrac{b_1{}^1}{R}\right), \quad V = v\left(1 - A\dfrac{b_1}{R}\right) \\ 9) \ldots\ldots p^1 = p_1 + \dfrac{s}{2g}\left[v_1{}^2 - v^2\left(1 - A\dfrac{b_1{}^1}{R}\right)^2\right], \\ \qquad P = p_1 + \dfrac{s}{2g}\left[v_1{}^2 - v^2\left(1 - A\dfrac{b_1}{R}\right)^2\right] \end{cases}$$

Setzt man $p = p_1$, so ist auch $v = v_1$, $A = 1$ und man erhält dann:

$$(14)\begin{cases} 10) \ldots\ldots v^1 = v_1\left(1 - \dfrac{b_1{}^1}{R}\right), \quad V = v_1\left(1 - \dfrac{b^1}{R}\right), \\ 11) \ldots\ldots p^1 = p_1 + \dfrac{s v_1{}^2 b_1{}^1}{gR}\left(1 - \dfrac{b_1{}^1}{2R}\right), \\ \qquad P = p_1 + \dfrac{s v_1{}^2 b_1}{gR}\left(1 - \dfrac{b_1}{2R}\right) \end{cases}$$

Es ergibt sich aus diesen Gleichungen der höchst einfache Satz, daß der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten an der geradlinigen Stelle m_1 des Strahles und an der erhabenen m proportional ist mit jener ersten Geschwindigkeit und mit der Dicke des Strahles bei m_1, verkehrt proportional aber mit dem Krümmungshalbmesser des Strahles bei m. Ebenso sieht man aus dem Werthe von P sehr deutlich, um wie viel der bei m ausgeübte Druck nun von dem abweicht, den man ohne Berücksichtigung der Verkleinerung der Geschwindigkeit bei m erhalten würde; denn läßt man in der Klammer das Glied $\frac{b_1}{2R}$ weg, so erhält man genau diesen letztern.

Die Anwendbarkeit der Formeln 14, 1 bis 14, 16 ist eine ziemlich allgemeine, weil die Voraussetzung unter der sie abgeleitet sind, nämlich daß die beiden Krümmungshalbmesser auf der hohlen und erhabenen Seite des Strahles gleich seien, oft sehr nahe eintreten wird. Würde nämlich die Dicke des Strahles an der gekrümmten Stelle gleich groß bleiben, wie an den geradlinigen, so wäre r um diese Dicke kleiner als R; da nun aber jene Dicke an der krummen Stelle größer ist als an den geraden, so kann dieß

beim Uebergange des Strahles von einer weniger gekrümmten oder geraden Stelle zu einer stärker gekrümmten nur dadurch bewirkt werden, daß an dieser letzteren der Krümmungshalbmesser r größer gemacht wird als jene Differenz $R - b_1$, wodurch sich aber r der Größe R wieder nähert. Nur wenn b_1 im Verhältnisse zu R sehr groß oder R sehr klein ist, wird r größer werden als R, weil dann, wie gleich nachher noch gezeigt werden wird, die Dicke b um Vieles von b_1 unterschieden ist. Ueberall wo dagegen R im Verhältniß zu b_1 ziemlich groß ist, können diese Formeln mit Annäherung richtig angewendet werden.

Der Krümmungshalbmesser R sei gleich Null, oder der Flüssigkeitsstrahl fließe über eine hohle Ecke. (Fig. 18.)

Zur Bestimmung der Bewegung in diesem Falle müssen die Formeln angewendet werden, welche für einen kleinen Werth von R gültig sind. Setzt man zu diesem Zwecke in den betreffenden Gleichungen 13, 1 bis 13, 5 überall $R = o$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(15)\left\{\begin{array}{l}
1) \ldots v = \sqrt{\frac{2g}{s}(p_1 - p) + v_1^2} \\[2ex]
2) \ldots v^1 = v\left(1 - \frac{b^1}{b}\right)^{\frac{b}{r}}, \quad V = o \\[2ex]
3) \ldots Ab_1{}^1 = \frac{rb}{b + r}\left(1 - \left[1 - \frac{b^1}{b}\right]^{1 + \frac{b}{r}}\right) \\[2ex]
4) \ldots Ab_1 = \frac{rb}{b + r} \\[2ex]
5) \ldots p^1 = p_1 + s\,\frac{v_1^2 - v^{12}}{2g}, \quad P = p_1 + s\,\frac{v_1^2}{2g}
\end{array}\right.$$

Aus den Gleichungen 15, 2 und 15, 5 ergibt sich sogleich der Werth von V und von P, ganz unabhängig von dem Werthe den r haben mag. Man sieht nämlich daraus, daß in der Ecke m selbst jedenfalls nur eine unendlich kleine oder gar keine Bewegung mehr stattfindet, sondern daß hier eine, freilich nur sehr kleine, ruhende Flüssigkeitsmasse liegen bleibt. Entfernt man sich von m etwas gegen n hin, so nimmt nun die Bewegung allmählig zu, bis sie beim Punkte n selbst ihren größten Werth erreicht hat. Die rasche Biegung, welche ein Theil der Elementarkanäle zu machen genöthigt wird, bringt eine so starke Fliehkraft hervor, daß dieselbe die nach dem Punkte m hinströmende Flüssigkeit zänzlich aufzuhalten vermag. Die Größe dieses Druckes gibt Gleichung 15, 5, woraus sich zeigt, daß sie gleich p_1 mehr dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule ist, deren Höhe der Fallhöhe von v_1 gleich kömmt. Der Druck muß daher zunehmen, wenn die ursprüngliche Geschwindigkeit v_1 der Flüssigkeit zunimmt und umgekehrt. — Um den Werth von b_1^1 und b_1 beurtheilen zu können, ist vorerst darauf aufmerksam zu machen, daß der Flüssigkeitsstrahl zu beiden Seiten des Punktes m eine symetrische Gestalt annehmen wird, weil die Gestalt des Kanales, durch den er fließt, ebenfalls symetrisch ist. Dasselbe findet auch in den Fällen statt, wo die Biegung nur eine allmählige, zu beiden Seiten des Punktes m aber symetrisch ist. Deßhalb aber ist nun die Normalfläche mn eine Ebene, die Linie mn eine gerade und halbirt den Winkel $m_1 m m^1$, der mit φ bezeichnet werden möge. Außerdem aber ist, wie sich aus den Gleichungen 15 ergibt, zur Beurtheilung der Werthe von b^1 und b die Kenntniß des Werthes von r nöthig. Dieser Werth ist aber durch die bisher gemachten Annahmen auf keine Weise bestimmt, wie es etwa in dem vorher behandelten Falle geschehen war, kann auch durch keine der allgemeinen, auf diese Größe bezüglichen Gleichungen berechnet, sondern muß daher nur etwa durch weitere passende Annahmen und Voraussetzungen angenähert bestimmt werden. Dieß möge im Folgenden versucht werden.

Würde man die Natur der hohlen Linie $n_1 n n^1$ kennen, so könnte daraus ihr Krümmungshalbmesser bei n bestimmt werden. Nun ist früher schon nachgewiesen worden, daß Veränderungen in

der Krümmung der Elementarkanäle nur allmählig vor sich gehen können. Ist aber dieß der Fall, so kann auch die Veränderung, welche in der Zu- und Abnahme der Dicke m_1n_1 des Strahles bei seiner Fortbewegung in dem Kanale stattfindet, nur eine allmälige sein. Um dieß noch näher zu bestimmen, muß hier etwas vorgegriffen werden. Man untersuche nämlich die Gestalt der Linie n_1nn^1 an irgend einer Stelle n_2, wo ihre Krümmung noch sehr unbedeutend ist. Für diese Stelle ist R unendlich groß, weil m_1m_2 eine gerade Linie ist; daher hat man zur Bestimmung von m_2n_2 oder b_1 die zweite der Gleichungen 13, 4 anzuwenden. Setzt man in derselben $R = \infty$, so erhält man, wenn r gegen R vernachläßigt wird:

$$B = R\sqrt{b^2 + 2rb}$$

und

$$Ab_1 = \frac{rb}{\sqrt{b^2 + 2rb}} \log n \frac{\sqrt{b^2 + 2rb} + b}{\sqrt{b^2 + 2rb} - b}$$

Ist ferner r gegen b ebenfalls sehr groß, so kann man für Ab_1 angenähert setzen:

$$Ab_1 = \frac{rb}{\sqrt{b^2 + 2rb}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{b^2 + 2rb} - b} = \frac{2rb^2}{\sqrt{b^2 + 2rb}\left(\sqrt{b^2 + 2rb} - b\right)}$$

Da nun in diesem Falle die Linie m_2n_2 oder b sehr nahe eine auf m_2m_1 senkrecht stehende Gerade ist, so kann dieselbe als Ordinate y der Curve n_1n_2n angesehen werden, wenn m_1m_2 als Abszissenaxe angenommen wird. Führt man zugleich noch für r den in Gleichung 12 angegebenen Werth von r ein, nämlich $r = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}$, an dessen Stelle hier, weil dy gegen dx noch sehr klein ist, auch der Ausdruck $r = -\frac{dx^2}{d^2y}$ gesetzt werden kann, so erhält man für Ab_1 den Ausdruck:

$$Ab_1 = \frac{-2y\, dx^2}{d^2y\left(y - 2\frac{dx^2}{d^2y} - \sqrt{y^2 - 2y\frac{dy^2}{d^2y}}\right)}$$

Löst man diese Gleichung in Bezug auf dx^2 auf, so erhält man:

$$Ab_1 \frac{y(2y - Ab_1)}{2(Ab_1 - y)^2} d^2y = dx^2$$

Setzt man in diese Gleichung $\frac{dy}{dx} = z$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ oder $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{z.dz}{dy}$, so erhält man:

$$z dz = \frac{2}{Ab_1} \cdot \frac{(Ab_1 - y)^2 dy}{y(2y - Ab_1)}$$

woraus:

$$z = \frac{dy}{dx} =$$

$$2\sqrt{\frac{1}{Ab_1}}\sqrt{Ab_1 \log n \frac{2y-Ab_1}{y} - Ab_1 \log n (2y-Ab_1) + \frac{y}{2} + \frac{Ab_1}{4} \log n (2y - Ab_1) + \text{const.}}$$

Durch Zusammenziehung und wenn man bedenkt, daß für $y = Ab_1$, $\frac{dy}{dx}$ gleich Null sein muß, erhält man endlich:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2(y - Ab_1)}{Ab_1} + \log n \frac{(2y_1 - Ab_1)(Ab_1)^3}{y^4}}$$

Ist nun y sehr nahe bei Ab_1, so kann $\log n \frac{(2y - Ab_1)(Ab_1)^3}{y^4}$ gleich $\frac{2y - Ab_1}{y} + 3\frac{Ab_1}{y} - 4 = 2\left(\frac{Ab_1}{y} - 1\right)$ gesetzt werden. Führt man diesen Werth in den Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ ein, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\left(\frac{y}{Ab_1} + \frac{Ab_1}{y} - 2\right)}$$

Integrirt man diese Gleichungen und nimmt den Anfangspunkt der Coordinaten da an, wo y die Größe h hat, so erhält man:

$$x = \int_h^y \frac{dy}{\sqrt{2\left(\frac{y}{Ab_1} + \frac{Ab_1}{y} - 2\right)}}$$

Um zu bestimmen, wie groß das Stück $n_2 n_1$ oder die Entfernung des Punktes n_1, wo der Strahl seine ursprüngliche Dicke Ab_1 wieder besitzt, von demjenigen sei, wo er die Dicke b hat, müßte obiges Integrale zwischen den Grenzen b und Ab_1 genommen werden. Setzt man nun für y der Reihe nach $Ab_1 + dy$, $Ab_1 + 2dy$, $Ab_1 + 3dy$ u. s. w., so erhält man:

$$x = \frac{dy}{\sqrt{2dy\left(\frac{1}{Ab_1} - \frac{1}{Ab_1 + dy}\right)}} + \frac{dy}{\sqrt{4dy\left(\frac{1}{Ab_1} - \frac{1}{Ab_1 + 2dy}\right)}} + \ldots .$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\,\frac{1}{Ab_1\,(Ab_1 + dy)}}} + \frac{1}{\sqrt{4\,\frac{2}{Ab_1\,(Ab_1 + 2dy)}}} + \ldots$$

Für den Fall y = b oder $y = Ab_1 + ndy$, wo n eine unendlich große Zahl ist, erhält man als Ausdruck für x eine Reihe von unendlich vielen Gliedern, die den zwei ersten, oben hingeschriebenen ähnlich sind. Da nun dieselben endliche Größen sind, und erst dann unendlich klein werden, wenn n selbst unendlich groß ist, so wird in diesem Falle x selbst einen unendlich großen Werth erhalten. Wenn bei $n_2 m_2$ die Biegung der Linie $n_2 n_1$ zwar sehr schwach, aber doch endlich ist, und n_1 der Punkt ist, wo diese Biegung beginnt, oder wo $n_1 n_2$ anfängt von einer geraden, mit $m_2 m_1$ parallelen Linie in eine krumme überzugehen, so ist $m_2 n_2$ unendlich groß. Die Biegung des Strahles macht sich also bis in unendliche Entfernung von der Ecke m fühlbar, obschon sie schon in kleiner Entfernung davon so unbedeutend wird, daß sie vernachläßigt werden kann.

Hieraus aber geht nun folgende für uns wichtige Eigenschaft der krummen Linie $n_1 n n^1$ hervor. Zieht man eine Gerade oo_1 parallel mit mm_1 und von derselben um die ursprüngliche Dicke Ab_1 des Strahles entfernt, so wird sich die krumme Linie nn_1, von n aus gerechnet, dieser Geraden immer mehr nähern, je weiter man sich von n entfernt, und in unendlicher Entfernung endlich

ganz mit ihr zusammenfallen. Dasselbe geschieht ferner auch mit der andern Hälfte nn^1 der krummen Linie in Bezug auf die Gerade oo^1, welche mit mm^1 parallel und um Ab_1 von derselben entfernt gezogen wurde. Die Linie n_1nn^1 verhält sich also in Bezug auf ihren Verlauf von n nach n_1 und n^1 zu den Geraden oo_1 und oo^1 ganz wie die beiden Aeste einer Hyperbel zu ihren Assymptoten, deren wirkliche Halbaxe on ist, deren eingebildete Axe aber von dem Winkel o_1oo^1 oder φ bestimmt wird. Man kann daher in der Bestimmung der Gestalt der Linie n_1nn^1 jedenfalls keinen großen Fehler begehen, wenn man annimmt, sie sei wirklich eine solche Hyperbel.

Sowie aber diese Annahme einmal gemacht ist, kann der Krümmungshalbmesser r für den Punkt n sogleich durch die Linie mn, die mit b bezeichnet werden soll, durch Ab_1 und durch den Winkel φ bestimmt werden. Bezeichnet man mit α und β die halbe wirkliche und die halbe imaginäre Axe der Hyperbel und mit r den Krümmungshalbmesser ihres Scheitels, so hat man bekanntlich:

$$r = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

Nun ist in unserem Falle:

$$\alpha = on = mn - mo = b - \frac{Ab_1}{\sin \frac{1}{2} \varphi}$$

$$\beta = \alpha \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi \ldots = \left(b - \frac{Ab_1}{\sin \frac{1}{2} \varphi}\right) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi$$

Daher nun:

$$(15_6) \ldots\ldots\ldots r = \left(b - \frac{Ab_1}{\sin \frac{1}{2} \varphi}\right) \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \varphi$$

Setzt man diesen Werth von r in die Gleichung 15, 4 hinein, so erhält man nach den nöthigen Reduktionen zur Berechnung von b die Gleichung:

$$(15_7)\ b = \frac{Ab_1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \left\{ 1 + \sin \tfrac{1}{2} \varphi + \sqrt{(1 + \sin \tfrac{1}{2} \varphi)^2 - 4 \sin^3 \tfrac{1}{2} \varphi} \right\}$$

Daß das + Zeichen bei der durch die Auflösung der quadratischen Gleichung entstehenden Wurzelgröße gewählt werden muß, ergibt sich sogleich, wenn man bedenkt, daß für $\varphi = 90^0$ und

$A = 1\ b > b_1$ werden muß. Zur Berechnung von Ab_1 ergibt sich aus dieser Gleichung unmittelbar:

$$(15_8)\ Ab_1 = b \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{1 + \sin \frac{1}{2} \varphi + \sqrt{(1 + \sin \frac{1}{2} \varphi)^2 - 4 \sin^3 \frac{1}{2} \varphi}}$$

Es ergibt sich aus diesen Gleichungen, daß das Verhältniß von b zu Ab_1 ganz von der Größe des Winkels φ abhängig ist, so daß für $\varphi = 180$, oder wenn gar keine Ecke vorhanden ist, $b = Ab_1$ wird; daß es dagegen mit der Abnahme von φ zunimmt und für $\varphi = 0$ beinahe einen unendlich großen Werth erhält. Um die verschiedenen Werthe, welche b nach und nach annimmt, leichter übersehen zu können, mögen dieselben für einige Werthe von φ hier angeführt werden, in der Voraussetzung, daß A gleich Eins, oder die Pressung auf alle Punkte der hohlen Fläche des Strahles gleich groß sei.

Wenn	$\varphi = 180^0$	ist b =	$1{,}000\ b_1$
„	$\varphi = 150^0$	„ b =	$1{,}327\ b_1$
„	$\varphi = 120^0$	„ b =	$1{,}835\ b_1$
„	$\varphi = 90^0$	„ b =	$2{,}933\ b_1$
„	$\varphi = 60^0$	„ b =	$5{,}608\ b_1$
„	$\varphi = 30^0$	„ b =	$9{,}618\ b_1$
„	$\varphi = 10^0$	„ b =	$79{,}110\ b_1$
„	$\varphi = 0^0$	„ b =	∞

Durch Einführung des in Gleichung 15, 6 angegebenen Werthes von r und des in Gleichung 15, 7 angegebenen Werthes von b in die Gleichungen 15, 2 und 15, 3 erhält man auch die Geschwindigkeit, die in irgend einem zwischen m und n gelegenen Punkte stattfindet, und die Gestalt des durch denselben gehenden Elementarkanales. Diese letztere kommt auch wieder einer Hyperbel nahe, deren Scheitel immer spitziger wird, je näher sie bei m liegt, und die für diesen Punkt selbst mit den Geraden m_1m und mm^1 zusammenfällt. Es ist demnach nicht schwierig, angenähert den Weg zu verzeichnen, den irgend ein Flüssigkeitstheilchen zurücklegt, welches da, wo der Strahl noch ganz geradlinig ist, sich in einer gegebenen Entfernung von m_1m oder n n befindet. Man braucht nur die letztere Größe mit $b_1{}^1$ zu be-

zeichnen, ihren Werth in Gleichung 15, 3 einzuführen, daraus den Werth von b^1 aufzusuchen, denselben von n aus auf der Geraden mm abzutrageu nnd den erhaltenen Punkt als den Scheitel einer Hyperbel anzusehen, deren Assympotte eine durch das ursprünglich angenommene Flüssigkeitstheen parallel mit mm gehende Gerade ist. Diese Hyperbel ist angenähert der verlangte Weg.

Der Krümmungshalbmesser R sei unendlich groß, oder die Flüssigkeit fließe durch einen geradlinigen Kanal.

Man hat im Verlaufe des eben behandelten Falles gesehen, daß die freie Seite eines rechteckigen Flüssigkeitsstrahles unter gewissen Umständen eine hohle Biegung annehmen kann, auch wenn alle drei Wände, von denen er eingeschlossen wird, Ebenen sind, und es werden in Zukunft noch andere Fälle dieser Art besprochen werden. Im Allgemeinen ist dieß immer der Fall, wenn der geradlinigen Bewegung des Strahles irgend ein Hinderniß entgegentritt. Es ist daher nöthig denselben hier besonders zu besprechen.

Es ist oben schon bemerkt worden, daß von den allgemeinen Formeln 13 hier immer diejenigen gebraucht werden müssen, welche für große Werthe von R gültig sind. Setzt man nun in denselben überall $R = \infty$, und berücksichtigt was in dem vorhergehenden Abschnitte über diesen Fall bereits ausgemittelt wurde, so erhält man zur Bestimmung der Bewegung der Flüssigkeit folgende Gleichungen:

$$(16)\quad \begin{cases} 1)\ v = \sqrt{\frac{2g}{s}(p_1 - p) + v_1^2} \\ 2)\ v^1 = v\,\frac{rb}{rb + bb^1 - \frac{1}{2}b^{12}},\quad V = v\,\frac{r}{r + \frac{1}{2}b} \\ 3)\ Ab_1^1 = \frac{rb}{\sqrt{b^2 + 2rb}} \times \log n\,\frac{(b - b^1 - \sqrt{b^2+2rb})\,(b + \sqrt{b^2+2rb})}{(b - b^1 + \sqrt{b^2+2rb})\,(b - \sqrt{b^2+2rb})} \\ 4)\ Ab_1^1 = \frac{2rbb^1}{(\sqrt{b^2+2rb} + b - b^1)\,(\sqrt{b^2+2rb} - b)} \\ 5)\ Ab_1 = \frac{rb}{\sqrt{b^2+2rb}}\,\log n\,\frac{\sqrt{b^2+2rb}+b}{\sqrt{b^2+1rb}-b} \\ 6)\ Ab_1 = \frac{2rb^2}{\sqrt{b^2+2rb}\,(\sqrt{b^2+2rb}-b)} \\ 7)\ p^1 = p_1 + s\,\frac{v_1^2 - v^{12}}{2g},\quad P = p_1 + s\,\frac{v_1^2 - V^2}{2g} \\ 8)\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\left(\frac{y}{Ab_1} + \frac{Ab_1}{y} - 2\right)},\quad r = -\frac{dx^2}{d^2y} \end{cases}$$

Die Gleichungen 4, 6 und 8 beziehen sich sämmtlich auf den Fall, in welchem die Krümmung der Linie n_1n noch sehr unbedeutend, also der Werth von r noch sehr groß ist.

Es ist aber schon darauf aufmerksam gemacht worden, daß die Strecke von irgend einem Punkte n der endlichen Krümmung des Strahles aus, bis zu der Stelle, wo er seine Krümmung beginnt, unendlich groß ist; hier muß nun über die Gestalt des Strahles noch Folgendes hinzugefügt werden. Wenn der Krümmungshalbmesser r sehr klein wird, nimmt auch die Geschwindigkeit V bei m fast in demselben Verhältnisse ab. Für den Fall, in welchem $r = o$ ist, kann man aus obigen Formeln noch keine ganz gültigen Schlüsse ziehen, denn es wird sich später zeigen, daß die oben für den Werth von r^1 gemachten Annahmen alsdann keine richtigen Ergebnisse mehr liefern würden. Aus den Gleichungen 16, 5 und

16, 6 ergibt sich ferner, daß die Größe b von nichts anderm abhängig ist, als von der ursprünglichen Dicke b_1 des Strahles, dem Krümmungshalbmesser r und der Größe A, und eben so aus Gleichung 16, 8, daß die Steigung der Linie nn_1 in irgend einem Punkte, wo b noch wenig von der ursprünglichen Dicke abweicht, nur von dem Verhältniß von b oder y zu Ab_1 abhängig ist. Dasselbe gilt daher auch von x und y selbst, nämlich daß die Gleichung zwischen diesen beiden Größen außer Ziffern nur noch die Größe Ab_1 enthalten würde. Könnte man die Gleichung zwischen x und y für irgend eine stärker gekrümmte Stelle des Strahles bestimmen, so würde dasselbe stattfinden. Man müßte hierzu in Gleichung 6 für r den durch dx, dy und d^2y ausgedrückten Werth und für b den aus den Gleichungen 12, 6 abzuleitenden Ausdruck setzen, in welchem noch der Winkel β durch die Gleichung $\tang\beta = \frac{dy}{dx}$ bestimmt werden müßte. Man würde also ebenfalls eine Gleichung zwischen x und y bekommen, in welcher nur die Größe Ab_1 noch vorkäme. Daraus aber folgt, daß die Bewegung eines in einem rechteckigen, auf einer Seite offenen Kanal fließenden Flüssigkeitsstrahles sich immer nach ein und demselben Gesetze verändert, möge was immer für ein Hinderniß seiner geradlinigen Bewegung entgegen stehen und diese Veränderung veranlassen. Die Linie n_1nn^1 behält also für jeden Flüssigkeitsstrahl von gegebener Dicke und für welchen A immer gleich bleibt, ein für allemal eine bestimmte unveränderliche Gestalt, mag die Biegung dieser obern Fläche des Strahles durch den Widerstand eines festen oder flüssigen Körpers, durch eine Wendung des Kanales oder durch irgend eine andere Ursache veranlaßt worden sein. Daß die für den Werth von r^1 und für b gemachten Annahmen nicht streng richtig sind, kann auf dieses Resultat jedenfalls einen nur unbedeutenden Einfluß ausüben, indem sie der Wahrheit immerhin nahe stehen, ebenso wahrscheinlich aber ist, daß dadurch der ausgesprochene Satz überhaupt gar nicht verändert werde.

Es muß ferner noch angegeben werden, auf welche Weise, für den Fall, da A = 1 ist, die Linie n^1n angenähert richtig verzeichnet werden kann. Man nehme zu diesem Zwecke für irgend

einen Punkt n_1 der zu verzeichnenden Linie den Krümmungshalbmesser r_1 an, aber so, daß er im Verhältniß zu b_1 sehr groß ist, so daß die Linie m_1n_1 noch als eine auf m_1m senkrecht stehende Gerade angesehen werden kann. Man berechne nun sowohl die Länge m_1n_1 oder b dieser Geraden vermittelst der Gleichung 16, 5 oder 16, 7, sowie die zugehörige Größe $\frac{dy}{dx}$ durch Gleichung 16, 8, weil dieselbe, da dy noch sehr klein ist im Vergleiche mit dx, den Winkel ausdrückt, welchen der angenommene zu n_1 gehörige Krümmungshalbmesser r_1 mit der Geraden m_1n_1 bildet. Man trage nun sowohl m_1n_1 senkrecht auf m_1m als auch r_1 von n_1 aus so auf, daß diese Linie mit der senkrechten m_1n_1 den Winkel $\frac{dy}{dx}$ bildet, und beschreibe mit diesem Halbmesser das erste Stück der Linie n_1n, nämlich den Bogen n_1n_2, vorläufig aber noch von unbestimmter Länge. Die Bestimmung des Punktes n_2, von wo aus die krumme Linie mit einem andern Krümmungshalbmesser r_2 fortgesetzt werden muß, kann nun auf folgende Weise geschehen. Man nehme diesen Halbmesser wieder beliebig, aber etwas kleiner als den ersten r_1 an, und berechne mittelst der Gleichung 16, 5 die zugehörige Größe m_2n_2 oder b. Sind nun r_1 und r_2 nicht viel von einander unterschieden, so wird m_2n_2 um etwas größer als m_1n_1, aber der Gestalt nach nur sehr wenig von dieser Linie verschieden sein, so daß, wenn man m_2n_2 so auf m_1n_1 legen würde, daß m_2 auf m_1 fiele und die Linie durch den Punkt n_1 ginge, alsdann beide Linien bei n_1 nahe dieselbe Richtung hätten und zwischen m_1 und n_1 fast ganz zusammenfallen würden. Daher würde die Linie m_2n_2 gerade um so viel über n_1 hinausragen als sie größer ist als die Linie m_1n_1 und dieser Ueberschuß würde sehr nahe die Richtung der Linie m_1n_1 bei n_1 haben, d. h. sehr nahe auf die Linie r_2 fallen. Um daher nun die richtige Lage des Punktes n_2 auf dem gezogenen Bogen n_1n_2 zu finden, trage man jenen Unterschied zwischen m_2n_2 und m_1n_1 wirklich auf r_1 von n_1 nach n_1^1 ab und denke sich die Linie $m_1n_1^1$ parallel mit sich selbst auf der Geraden m_1m so weit verschoben, bis n_1^1 den Bogen n_1n_2 in n_2 trifft. Man findet diesen Punkt einfach dadurch, daß man von

$n_1{}^1$ aus eine Parallele mit m_1m bis zu ihrem Durchschnittspunkte mit n_1n_2 zieht. — Von nun an wird man immer auf dieselbe Weise weiter schreiten; nämlich zunächst nun den Halbmesser r_2 von n_2 aus auf den zu diesem Punkte gehörigen Halbmesser r_1 auftragen, mit demselben einen Bogen n_2n_3 von unbestimmter Länge beschreiben; dann einen Halbmesser r_3, etwas kleiner als r_2 annehmen, die zugehörige Größe m_3n_3 oder b durch Gleichung 16,5 bestimmen, die Differenz $m_3n_3 - m_2n_2$ von n_2 nach $n_2n_2{}^1$ auftragen, und von $n_2{}^1$ eine Parallele mit m_1m bis zum Durchschnitte n_3 mit dem Bogen n_2n_3 ziehen u. s. w. Je kleiner die Krümmungshalbmesser werden, um so weniger darf sich jeder folgende von dem zunächst vorhergehenden unterscheiden, weil alsdann die Unterschiede der zugehörigen Werthe von b verhältnißmäßig größer werden, und daher ohne diese Vorsicht die Genauigkeit der Construktion sehr beeinträchtigt würde.

In folgender Tafel sind die Werthe von b zusammengestellt, die man für verschiedene Größen des Krümmungshalbmessers r bekömmt. Bei der Annahme von r wurde immer das Verhältniß dieser Größe zu der zugehörigen Größe b als gegeben angenommen, weil dadurch die Rechnung etwas vereinfacht wird. Wird dieses Verhältniß $\frac{r}{b}$ mit m bezeichnet, und diese Größe in Gleichung 16, 5 eingeführt, so erhält dieselbe die Gestalt:

$$b_1 = b \frac{m}{\sqrt{1 + 2m}} \log n \frac{\sqrt{1 + 2m} + 1}{\sqrt{1 + 2m} + 1}$$

woraus b mit der größern Leichtigkeit durch b_1 und m bestimmt werden kann. Die erste Spalte der folgenden Tafel, die mit m überschrieben ist, enthält daher dieses Verhältniß, die zweite und dritte aber enthalten die zugehörige Größe von b und von r, beide in Theilen der ursprünglichen Dicke b_1 des Strahles ausgedrückt. Die vierte Spalte enthält den Winkel ψ. Endlich sind auch noch in der fünften und sechsten Spalte die Abszissen und Ordinaten der Punkte n_1, n_2, n_3 . . . angegeben worden, indem m_1m als Abszissenaxe angenommen und der Anfangspunkt der Coordinaten an jenen Punkt der Linie mn versetzt wurde, für welchen die Tangente der Curve n_1n senkrecht auf m_1m steht. Dieselben wurden

auf folgende Weise berechnet. Nennt man den Winkel zwischen r_1 und einer senkrecht auf m_1m stehenden Linie ψ_1, den Unterschied zwischen den Bogen m_2n_2 und m_1n_1 aber $\triangle b_2$ und das Bogenstück n_1n^2 $\triangle B_2$, so hat man wegen dem rechtwinkligen Dreieck $n_1n_2n_1{}^1$ die Gleichung: $\triangle B_2 \frac{\triangle b_2}{\text{tang } \psi_1}$. Bezeichnet man ferner die Entfernung der beiden Punkte n_1 und n_2 in der Richtung von m_1m mit $\triangle x_2$ und den Unterschied ihrer Entfernungen von m_1m oder ihrer Ordinaten mit $\triangle y_2$, so hat man ferner: $\triangle x_2 = \triangle B_2 \cos \psi$ und $\triangle y_2 = \triangle B_2 \sin \psi_1$. Führt man nun in diese Gleichungen für $\triangle B_2$ obigen Werth ein, so erhält man:

$$\triangle x_2 = \triangle b_2 \frac{\cos \psi_1}{\text{tang } \psi_1},\ \triangle y_2 = \triangle b_2 \cos \psi_1$$

Wird endlich der Winkel den die Radien r_1 und r_2 mit einander bilden mit $\triangle \psi_2$ bezeichnet, so hat man noch:

$$\triangle \psi_2 = \frac{\triangle b_2}{r_1 \text{ tang } \psi_1},\ \psi_2 = \psi_1 + \frac{\triangle b_2}{r_1 \text{ tang } \psi_1}$$

Bezieht man diese Größen ganz allgemein auf irgend einen Punkt n_α, so hat man:

$$\triangle x_\alpha = \frac{\triangle b_\alpha . \cos \psi_{\alpha-1}}{\text{tang } \psi_{\alpha-1}},\ \triangle y_\alpha = \triangle b_\alpha \cos \psi_{\alpha-1},$$

$$\psi_\alpha = \psi_{\alpha-1} + \frac{\triangle b_\alpha}{r_{\alpha-1} \text{ tang } \psi_{\alpha-1}}$$

Bedenkt man nun, daß

$$x = \triangle x_1 + \triangle x_2 + \ldots \triangle x_\alpha + \text{const. und}$$

$$y = \triangle y_1 + \triangle y_2 + \ldots \triangle y_\alpha + \text{const.}$$

so ergibt sich sogleich, wie x und y für irgend einen Punkt n_α bestimmt werden kann. Die in diesen Formeln vorkommenden Constanten hängen von dem Anfangspunkte der Coordinatenaxe ab.

Der Winkel 0° 48′ 5″ für m = 30 wurde durch obige Formel für $\frac{dy}{dx}$ berechnet, die folgenden aber nach der soeben angegebenen Gleichung für ψ_α.

m	b	r	ψ	x	y
100	1,0034 b_1	100,34 b_1			1,0034 b_1
60	1,0055 „	60,330 „			1,0055 „
30	1,0111 „	30,333 „	0° 48′ 5″		1,0111 „
20	1,0166 „	20,332 „	1° 30′ 35″	6,5176 b_1	1,0166 „
10	1,0331 „	10,331 „	3° 18′ 14″	2,5855 „	1,0331 „
8	1,0414 „	8,3312 „	4° 6′ 12″	1,9597 „	1,0414 „
6	1,0550 „	6,3300 „	5° 24′ 17″	1,8183 „	1,0549 „
4	1,0811 „	4,3244 „	7° 54′ 4″	1,6272 „	1,0809 „
3	1,1088 „	3,3246 „	10° 30′ 33″	1,3534 „	1,1084 „
2,5	1,1302 „	2,8255 „	12° 30′ 25″	1,1557 „	1,1294 „
2,0	1,1641 „	2,3282 „	16° 24′ 27″	1,0423 „	1,1625 „
1,5	1,2137 „	1,8205 „	20° 30′ 55″	0,8932 „	1,2101 „
1,0	1,3153 „	1,3153 „	29^6 6′ 8″	0,7316 „	1,3052 „
0,8	1,3894 „	1,11152 „	34° 54′ 20″	0,4773 „	1,3700 „
0,6	1,5102 „	0,90612 „	43_0 48′ 32″	0,3610 „	1,4691 „
0,5	1,6045 „	0,80225 „	50° 0′ 39″	0,2191 „	1,5371 „
0,45	1,6663 „	0,7498 „	53° 42′ 40″	0,1481 „	1,5768 „
0,40	1,7424 „	0,69696 „	58° 0′ 21″	0,1448 „	1,6219 „
0,35	1,8472 „	0,64652 „	63° 24′ 9″	0,1117 „	1,6774 „
0,30	1,9648 „	0,58944 „	70° 12′ 20″	0,0681 „	1,7300 „
0,26	2,0913 „	0,54374 „	73° 0′ 34″	0,0417 „	1,7733 „
0,23	2,2150 „	0,50945 „	77° 0′ 23″	0,0261 „	1,8094 „
0,20	2,3869 „	0,47738 „	81° 30′ 2″	0,0151 „	1,8481 „
0,18	2,5228 „	0,45410 „	83° 54′ 23″	0,0062 „	1,8683 „
0,16	2,6899 „	0,43038 „	86° 18′ 10″	0,0032 „	1,8860 „
0,14	2,9002 „	0,40600 „	88° 6′ 16″	0,0012 „	1,8996 „
0,12	3,1733 „	0,38080 „	90° 0′ 21″	0,0003 „	1,9086 „
0,10	3,5468 „	0,35468 „			
0,08	4,0833 „	0,32666 „			
0,06	4,9491 „	0,29694 „			

Mit Hülfe dieser Tafel kann nun die Construktion der Linie n_1nn^1 entweder durch die verschiedenen Krümmungshalbmesser r oder unmittelbar durch ihre Ordinaten und Abszissen verzeichnet werden. Für m = 0,12 ist zwar ψ nicht ganz genau gleich 90° und mithin x nicht ganz genau gleich Null geworden; diese kleinen Unterschiede können aber schon deßhalb vernachläßigt werden, weil die Rechnung, als eine bloße Annäherungsrechnung, kaum bis auf diesen Grad der Genauigkeit Anspruch machen kann.

Wollte man außer der Linie n_1n noch andere zwischen m_1 und n_1 durchgehende Elementarkanäle verzeichnen, so müßten die denselben entsprechenden Bogen b^1 nach den Gleichungen 16, 3 oder 16, 4 berechnet werden.

Bewegung der Flüssigkeit durch gekrümmte Röhren. (Fig. 21.)

In allen bisher behandelten Fällen wurde immer vorausgesetzt, die hohle Fläche des Wasserstrahles sei frei; nimmt man aber an, daß auch diese Fläche von einer Wand begrenzt sei, so wird sich bei näherer Untersuchung zeigen, daß die für die obigen Fälle angegebenen Gesetze auch auf diesen angewendet und mittelst derselben daher auch die Bewegung in diesem Falle angenähert bestimmt werden kann.

Nimmt man zuerst an, daß diese Wand genau die Gestalt der Linie n_1nn^1 selbst besitze, so wird durch sie offenbar keine Veränderung in der Bewegung der Flüssigkeit hervorgebracht werden können. Ist aber, was bei gekrümmten Röhren, durch welche Flüssigkeiten geleitet werden, meistens der Fall ist, der Abstand der beiden krummen Röhrenwände überall gleich groß, so soll die Bewegung an der krummen Stelle, durch welche zwei gerade Theile dieser Röhre mit einander verbunden werden, näher untersucht werden. Dazu kann man am zweckmäßigsten von der Stelle mn ausgehen, wo die größte Krümmung eingetreten ist. Auf diese Stelle lassen sich nun zur Bestimmung der Geschwindigkeit und Pressung in irgend einem zwischen m und n gelegenen Punkte die

Gleichungen 13, 2 und 13, 5 anwenden, aus denen sich unmittelbar ergibt, daß bei n die Geschwindigkeit größer und die Pressung der Flüssigkeitstheilchen kleiner ist, als bei m. Diese Geschwindigkeit bleibt auch, wie gezeigt wurde, in der Nähe von n auf der hohlen Fläche, z. B. bei n_2 unverändert, wenn die äußere Pressung ebenfalls gleich bleibt. Dagegen wird die Länge des Bogens m_2n_2 an einer Stelle, wo die Krümmung der Röhre bei m_2 kleiner ist, als bei m_1, oder wo sie vielleicht schon ganz in eine Gerade übergegangen ist, kleiner als der Bogen mn, weil die Elementarkanäle bei m_2 von der Fliehkraft der über ihr liegenden Schichten weniger stark gepreßt werden, als bei m und ihre Geschwindigkeit daher größer sein muß. Ist nun die Weite der Röhre bei m_2 gleich groß, wie bei m, so wird sich daher die hohle Fläche des Flüssigkeitsstrahles bei n_2 von der Röhrenwand entfernen und die Linie nn_2 eine ganz ähnliche Gestalt annehmen, wie wenn auf dieser Seite keine Röhrenwand vorhanden wäre. Zugleich ist auch ein Grund vorhanden, warum sich der Strahl von n_1 an, wo er noch die ganze Röhre ausfüllen mag und überall eine gleiche Geschwindigkeit besitzt, ebenfalls zusammenzieht und von der Röhrenwand entfernt, um dadurch dann mit der Linie n_2n zusammen zu treffen. Da nämlich bei m die Pressung größer und die Geschwindigkeit kleiner ist als bei n, durch den gleich großen Querschnitt m_1n_1 aber dieselbe Flüssigkeitsmenge fließt wie durch mn, die aber in allen Punkten dieses Querschnittes die gleiche Pressung und Geschwindigkeit besitzt, so ist bei n_1 die Pressung größer, die Geschwindigkeit aber kleiner als bei n und n_2. Daher muß die Flüssigkeit bei ihrem Uebergange von der größeren Pressung bei n_1 zu der kleinern bei n_2 an der Geschwindigkeit zunehmen. Da dagegen bei m_2 die Pressung nicht so stark ist, als bei m, so wird auch die Geschwindigkeit von m_1 nach m_2 nur unbedeutend abnehmen, die mittlere Geschwindigkeit des von m_1n_1 herkommenden Strahles in m_2n_2 also größer sein als in m_1n_1 oder n_1n. Der Querschnitt m_2n_2 muß daher kleiner sein als m_1n_1 und die Linie n_1n_2 sich daher von der Röhrenwand entfernen. Es ist mithin klar, wie von beiden Seiten her die hohle Fläche des Strahles von der Röhrenwand abgelenkt wird, und es folgt daraus, daß

sich zwischen dem Strahle und der Röhre bei nn_2n_1 ein Raum bilden muß, der allerdings auch von Flüssigkeit ausgefüllt, nicht aber von den Elementarkanälen des Strahles durchzogen werden wird. Diese Flüssigkeitsmasse wird sich daher im Ganzen auch nicht aus diesem Raume entfernen, sondern wahrscheinlich in der Nähe der Fläche n_1n_2n eine Bewegung annehmen, die jener des Strahles nahe kömmt, indem sie durch die Reibung der Flüssigkeitstheilchen an einander mitgerissen wird; längs der Röhrenwand aber wird sie die entgegengesetzte Bewegung von n nach n_1 hin machen, und mithin in dem betrachteten Raume einen länglichen Strudel oder Wirbel bilden. Ob die Einbiegung von n_1 nach n_2 sehr rasch oder nur allmählig erfolge, kann nun freilich nicht genauer bestimmt werden, indem dieß namentlich auch von Kräften abhängt, die überhaupt hier nicht berücksichtigt wurden, nämlich von der Kraft, mit welcher sich die Flüssigkeit an die Röhrenwände anhängt. Dessen ungeachtet bleibt alles über das Vorhandensein eines solchen Raumes, die gegen die Mitte n_2 und das Ende n stattfindende kleinere Pressung als bei n_1 und die größere Geschwindigkeit bei n_2 und n_1, Gesagte unverändert.

Das Verhalten des Strahles zwischen mn und m^1n^1 ist nun leicht zu bestimmen. Von n an wird sich, ganz aus denselben Gründen wie zwischen n und n_2, die hohle Strahlfläche wieder von der Röhrenwand entfernen, so daß n_3 von derselben etwas absteht; später aber, bei n^1, wird der Strahl, durch die Reibungen und andern gegen die Bewegung wirkenden Widerstände zurückgehalten und genöthiget, die Röhre wieder ganz auszufüllen, wodurch ebenfalls ein Raum nn_3n_1 mit Flüssigkeit von wirbelnder Bewegung und kleinerer Pressung als bei n^1 entsteht. Von m^1n^1 an wird der Flüssigkeitsstrahl nun wieder, die Röhre ausfüllend, mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fortgehen, wie er bei m_1n^1 angekommen war.

Die Richtigkeit dieser auf rein theoretische Untersuchungen gestützten Behauptungen könnte durch Versuche leicht geprüft werden, indem man an den Punkten $m_1m_2mm_3m^1$ und $n_1n_2nn_3n^1$ einer solchen Röhre kleine, senkrecht aufsteigende Röhrchen anbrächte, die mit dem Innern der Hauptröhre in Verbindung ständen, und in

denen die Flüssigkeit auf verschiedene Höhen aufsteigen würde, je nach der Verschiedenheit der Pressung, die sie in jenen Punkten erleidet. Außerdem werden die entwickelten Ansichten auch durch die Versuche bestätiget, die über den Verlust an Gefäll oder an lebendiger Kraft angestellt wurden, welcher entsteht, wenn eine Flüssigkeit in einer Röhre durch eine Krümmung fließen muß. Ein solcher Verlust entsteht nämlich offenbar bei der Stelle m^1n^1, wo der zusammengezogene Wasserstrahl durch die Reibungen und andere Widerstände genöthiget wird, sehr schnell wieder die Röhre ganz auszufüllen und dadurch einen Theil seiner Geschwindigkeit verliert. Bezeichnet man die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit bei m_3n_3 mit v_1, die bei m^1n^1 mit v, welches zugleich die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit in den geradlinigen Stellen der Röhre ist, so ist nach dem Carnot'schen Satze der Verlust an lebendiger Kraft, auf ein Kilogram Flüssigkeit bezogen, beim Uebergange von m_3n_3 nach m^1n^1 gleich:

$$\frac{(v_1 - v)^2}{2g}$$

Nimmt man nun annäherungsweise an, die Elementarkanäle hätten bei mn alle die Krümmung der Röhrenaxe und die Geschwindigkeit bei m_3n_3 sei so groß, wie wenn der Strahl frei und die Krümmung in diesem Punkte schon keinen Einfluß mehr auf seine Bewegung ausübte, so hat man für die Linie m_3n_3 oder b_3 aus Gleichung 14, 4 den Ausdruck:

$$b_3 = R\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{b}{R}}}\right)$$

worin b die Linie mn bedeutet, die gleich dem Durchmesser der Röhre ist, und R den Krümmungshalbmesser der Axe bei mn. Da nun ferner

$$v_1 = v\,\frac{b}{R\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{b}{R}}}\right)}$$

ist, so hat man:

$$(17_1) \ldots \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{b}{R\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{b}{R}}}\right)} - 1\right)^2$$

Nach dieser Formel wurden die Verluste an lebendiger Kraft berechnet für die Fälle, welche Dubuat durch Versuche bestimmte. Die erhaltenen Ergebnisse sind sammt den durch die Versuche bestimmten und den nöthigen Abmessungen in folgender Tafel zusammengestellt worden.

R	Durchmesser b	Zahl und Größe der Winkel.	Geschwindigkeit v.	$\frac{(v_1-v)^2}{2g}$ nach den Versuchen.	$\frac{(v_1-v)^2}{2g}$ nach der Rechnung.		
0,057	0,0271	1 zu 36⁰	2,300	0,0203	0,0177		1,15
0,057	0,0271	2 „ 36⁰	2,300	0,0406	0,0355		1,15
0,057	0,0271	3 „ 36⁰	2,300	0,0674	0,0532		1,27
0,134	0,0271	4 „ 24⁰,6	2,300	0,0406	0,0117		3,47
0,057	0,0271	10 „ 36⁰	1,939	0,1598	0,1261		1,27
0,057	0,0271	4 „ 36⁰	1,572	0,0444	0,0331		1,34
0,057	0,0271	4 „ 36⁰	0,794	0,0111	0,0084		1,32
0,114	0,0541	4 „ 36⁰	2,336	0,0785	0,0732		1,07
0,114	0,0541	4 „ 36⁰	1,590	0,0360	0,0339		1,06
0,268	0,0541	6 „ 24⁰,6	. . . .	. . . . . .	0,0181		
0,114	0,0541	5 „ 36⁰	2,336	0,2339	0,0915	0,1829	1,28
0,061	0,0541	1 „ 56⁰,23	. . . .	. . . . . .	0,0733		
(0,034	0,0541	1 „ 56⁰,23	2,336	. . . . . .	0,3928)		
						Mittel:	1,21

Zunächst ist über diese Tafel zu bemerken, daß im letzten Falle, wo der Anprallwinkel 56°,23 ist, für R nicht der Krümmungshalbmesser der Kanalaxe, sondern der convexen Wand desselben angenommen wurde; denn ersteres wäre nur dann nahe richtig, wenn sich auch die hohle Seite des Strahles an die hohle Kanalwand anlegen würde; da dieß aber bei starken Krümmungen bei weitem nicht eintrifft, sondern der Krümmungshalbmesser der hohlen Seite des Strahles bedeutend größer ist als derjenige der Wand, so nähert sich die mittlere Krümmung in solchen Fällen mehr der Krümmung der erhabenen Kanalwand. Würde man für R den Krümmungshalbmesser der Kanalaxe setzen, der gleich 0,034 ist, so erhielte man das zu große in Klammern eingeschlossene Resultat 0,3928 als Gefällsverlust wegen dieses Winkels. Obschon nun bei den kleinern Anprallwinkeln, bei welchen R gleich dem Krümmungshalbmesser der Kanalaxe gesetzt wurde, die berechneten ziemlich gut mit den durch Versuche erhaltenen Ergebnissen übereinstimmen, so könnte doch auch hier, der Gleichförmigkeit wegen, R gleich dem Krümmungshalbmesser der erhabenen Röhrenwand genommen werden, wodurch alle berechneten Resultate etwas kleiner und daher die Verhältnißzahlen der letzten Spalte etwas größer würden. — Diese Verhältnißzahlen zeigen nun, daß alle berechneten Gefällsverluste ohne Ausnahme kleiner ausgefallen sind als die durch Versuche bestimmten, was auch schon deßwegen erwartet werden mußte, weil in der Wirklichkeit ohne Zweifel manche kleine Unregelmäßigkeiten in der Bewegung vorkommen, die bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden können, und welche jedesmal einen kleinen Verlust an lebendiger Kraft herbeiführen. Solche müssen sogar nothwendig schon deßwegen vorkommen, weil die Röhren meistens plötzlich, nicht allmählig von der geraden Gestalt in die krumme übergehen, in welchem Fall, wie oben gezeigt wurde, immer plötzliche Bewegungsveränderungen stattfinden. Mit Ausnahme des vierten Resultates zeigen ferner diese Verhältnißzahlen eine ziemlich gute Uebereinstimmung unter sich, so daß das größte von ihnen nur etwa um $\frac{1}{10}$, das kleinste etwa um $\frac{1}{8}$ von dem mittleren Werthe abweicht. Dieser Mittelwerth selbst aber zeigt, daß die berechneten Resultate nahezu um $\frac{1}{5}$ kleiner sind als

die durch Versuche erhaltenen. Durch Annahme jenes größern Werthes von R würde dieser Mittelwerth noch etwas steigen und könnte vielleicht auf etwa 1,25 oder 1,3 gesetzt werden. — Warum nun das vierte Ergebniß so bedeutend vom richtigen Werthe abweicht, während alle übrigen nahezu einstimmen, ist freilich nicht klar. Es ist möglich, daß die berechneten Gefällsverluste für Winkel, die bedeutend unter 36° liegen, überhaupt weiter unter dem richtigen Werthe stehen; jedenfalls aber bleiben dann dieselben bis zu Winkeln von 56° richtig, was aus der Richtigkeit des letzten Resultates folgt, was vielmehr von der Wahrheit abweichen müßte, wenn der von jenem Winkel herkommende Verlust sehr unrichtig ausgefallen wäre. — Mit Beiziehung des Coeffizienten 1,25 könnte daher in einem gegebenen Falle der durch eine Krümmung entstehende Verlust an lebendiger Kraft oder an Gefälle berechnet werden durch die Formel:

$$(17_2) \quad \ldots \; 1{,}25 \; \frac{v^2}{2g} \left(\frac{b}{R \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{b}{R}}}\right)} - 1 \right)^2$$

worin v die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit,
b den Durchmesser der Röhre,
R den Krümmungshalbmesser der erhabenen Röhrenwand,
e die Zahl 2,71828 . . . und g die Zahl 9,8088 . . .
bedeutet.

Wenn das bisher Gesagte richtig ist, so ergibt sich nun auch leicht, wie aller und jeder Verlust an lebendiger Kraft bei Krümmungen vermieden werden könnte. Man krümme die Röhre nicht plötzlich, d. h. man lasse sie nicht plötzlich von einer geraden Linie in einen Bogen mit einem kleinen Krümmungshalbmesser übergehen, sondern z. B. etwa angenähert wie eine Hyperbel; man erweitere sie ferner an der gekrümmten Stelle, so daß der Durchmesser b_1 an den geraden Stellen der Gleichung:

$$b_1 = R \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{b}{R}}}\right)$$

oder der Durchmesser b an der gekrümmten Stelle der Gleichung:

$$(17_3) \ldots\ldots b = R \log n \frac{1}{1 - \frac{b_1}{R}}$$

entspricht, wo R den kleinsten Krümmungshalbmesser der erhabenen Röhrenwand (von außen beurtheilt) bedeutet. Alsdann wird sich der Flüssigkeitsstrahl in derselben so bewegen, wie wenn er au seiner hohlen Seite von gar keiner Wand eingeschlossen würde; die beiden besprochenen Räume, in denen die Flüssigkeit nur eine wirbelnde Bewegung hat, werden wegfallen, indem nur der Strahl selbst die Röhre überall ausfüllt, und namentlich wird nun die plötzliche Geschwindigkeitsveränderung bei m^1n^1 ganz aufgehoben werden, weil das geradlinige, von m^1n^1 anfangende Röhrenstück genau den Querschnitt des Strahles bei m_3n_3 hat. Damit fällt aber auch der besprochene Verlust an lebendiger Kraft weg. — Auch dieses Merkmal könnte zur Prüfung der entwickelten Theorie auf dem Wege des Versuches benutzt werden.

Zur Berechnung des Druckes, den die Flüssigkeit auf irgend einen Punkt der erhabenen Röhrenwand ausübt, müssen die Formeln 14, 5 oder bequemer 14, 11 benutzt werden. Bezeichnet man mit R immer den kleinsten Krümmungshalbmesser bei m und mit R_1 den an irgend einer andern Stelle, z. B. bei m_4, so ist mithin der Druck auf die Flächeneinheit in irgend einem Punkte m_4 gleich:

$$(17_4) \ldots\ldots P_1 = p_1 + s \frac{v^2b}{gR_1}\left(1 - \frac{b_1}{2R_1}\right)$$

wo v und b_1 die in 17, 2 und 17, 3 angegebene Bedeutung haben. Der gesammte auf die Röhrenwand ausgeübte Druck der in der Krümmung befindlichen Flüssigkeit bleibt, wie sich durch Anwendung des Prinzipes der lebendigen Kräfte ergibt, immer so groß, wie er sich durch Berechnung aus der Fliehkraft der Flüssigkeit, ohne Rücksicht auf ihre Aufstauung in der Krümmung, ergibt. Durch direkte Berechnung dieses Gesammtdruckes aus obigem Werthe für P_1 würde nur deßwegen ein scheinbar widersprechendes Ergebniß erhalten, weil die Voraussetzung, daß R = r, niemals auf alle

Punkte einer Krümmung angewendet werden kann. Dieß ist namentlich bei einer rasch erfolgenden Biegung sehr auffallend, wo die hohle Fläche des Flüssigkeitsstrahles sich schon zu krümmen anfängt und r also einen endlichen Werth erhält, wenn die erhabene Wand noch gerade oder R noch unendlich groß ist. Nur bei einer unendlich schwachen Krümmung, oder wenn $\frac{b}{R}$ sehr klein ist, findet dieß nicht Statt, in welchem Fall dann auch durch Anwendung der Formel 17, 4 für den Gesammtdruck jener bekannte Werth erhalten wird.

Schließlich mag hier kurz noch ein Fall erwähnt werden, der zwar sehr wohl von dem vorhergehenden unterschieden werden muß, doch aber so viel Aehnliches mit ihm besitzt, daß er sehr leicht mit demselben verglichen werden kann; der Fall nämlich, in welchem eine flüssige Masse in einem ringsum geschlossenen Gefäße wirbel- oder strudelförmig herumbewegt wird. Ist abcd, Fig. 22, ein solches Gefäß, in welchem die Flüssigkeit durch irgend eine Ursache in wirbelnde Bewegung versetzt worden ist, so muß vor Allem bemerkt werden, daß jetzt keine Normalfläche mn in irgend einem Punkte des Gefäßes angegeben werden kann, in welchem die Geschwindigkeit aller Elementarkanäle nothwendig gleich groß wäre, wie beim Uebergange der Flüssigkeit aus einer geradlinigen Röhre in eine Krümmung. Auch kann man nicht behaupten, diese Geschwindigkeit sei so groß, daß sie beim Uebergange der Flüssigkeit in die geradlinige Bewegung für alle Elementarkanäle gleich groß ausfallen würde, wie es in dem soeben behandelten Falle geschah; die einzelnen, durch irgend eine Normalfläche mn gehenden Elementarkanäle können im Gegentheile die verschiedensten Geschwindigkeiten besitzen, die ganz von der ursprünglich bewegenden Ursache abhängig sind. Ist aber diese Geschwindigkeit in irgend einer Normalfläche einmal von irgend einer äußern Ursache bestimmt, so muß sie freilich in allen andern Punkten des Raumes dann den oben entwickelten allgemeinen Gesetzen krummliniger Bewegung von Flüssigkeiten folgen und hängt dann namentlich noch von der Gestalt des Gefässes ab. Da also in einer Normalfläche, z. B. in mn, die Bewegung der einzelnen Elementarkanäle beliebig sein

kann, so soll hier zunächst nur der Fall betrachtet werden, in welchem diese Bewegung so ist, wie in einer gekrümmten Röhre. Nimmt man ferner noch an, mn sei im Verhältniß zu den Krümmungshalbmessern der Elementarkanäle nur eine kleine Größe, so kann auch ohne großen Fehler angenommen werden, alle diese Krümmungshalbmesser, die sich auf ein und dieselbe Normalfläche beziehen, haben einen gleichen Werth, und alsdann können auf diesen Fall alle jene Gleichungen angewendet werden, welche für die Bewegung in krummer Röhre unter Nr. 14, 1 bis 14, 11 aufgestellt wurden. Da bei diesen Gleichungen die in den allgemeinen Gleichungen vorkommende Größe A gleich Eins und mithin der auf die hohle Fläche des Strahles ausgeübte Druck p_1 überall gleich groß vorausgesetzt wurde, so muß hier, um diese Gleichungen anwenden zu können, die innerhalb n befindliche Flüssigkeitsmasse als ganz oder nahezu ruhend vorausgesetzt werden.

Sind alle diese Voraussetzungen erfüllt, so folgt nun aus den angeführten Formeln, daß überall mit der Krümmung der Gefäßwand auch die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ab=, dagegen die Dicke mn der bewegten Schicht zunimmt. So wäre also in dem oben dargestellten Gefässe diese Schicht bei a und c am dicksten, bei b und d am dünnsten. Vorzüglich soll aber hier auf die Pressung hingewiesen werden, welche die Wände eines solchen Gefässes von der Flüssigkeit zu erleiden haben. Diese Pressung auf die Gefäßwand in irgend einem Punkte b oder c derselben kann vermittelst der Formeln 17, 5 berechnet werden. Sind die Punkte a, b, c und d so vertheilt, daß die durch sie an den Gefäßumfang gezogenen Tangenten rechtwinklig zu einander stehen, so wird für die Pressung auf eines dieser Bogenstücke, z. B. auf bc, der Winkel φ in jenen Formeln gleich 90^0, und man erhält daher:

$$P_1 = p_1 + \frac{s({v_1}^2 - V^2)}{2g}$$

$$\text{worin } V = \frac{v_1}{e^{\frac{b}{R}}} \text{ ist,}$$

und R den Krümmungshalbmesser der Elementarkanäle in irgend einer Normalfläche mn, b die Dicke der bewegten Flüssigkeitsschicht

an dieser Stelle oder die Linie mn selbst, v_1 die an der hohlen Fläche dieser Schicht stattfindende Geschwindigkeit und p_1 den auf diese Fläche von der innern flüssigen Masse ausgeübten Druck, auf einen Quadratmeter bezogen, bezeichnet. Durch Elimination von V folgt:

$$P = p_1 + s v_1^2 \frac{1 - e^{-\frac{2b}{R}}}{2g}$$

Ist für einen andern Punkt der Gefäßwand der Krümmungshalbmesser gleich R_1 und die Dicke der Flüssigkeitsschicht gleich b_1, so hat man für den Druck P_1:

$$P_1 = p_1 + s v_1^2 \frac{1 - e^{-\frac{2b_1}{R_1}}}{2g}$$

Nun ist aber nach Gleichung 14, 4:

$$1 - e^{-\frac{2b_1}{R_1}} = \frac{R}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{2b}{R}}\right)$$

Daher ist:

$$\frac{P - p_1}{P_1 - p_1} = \frac{R_1}{R}$$

d. h. der von der Bewegung der Flüssigkeit herkommende Druck auf die Gefäßwand ist verkehrt proportional mit ihrem Krümmungshalbmesser.

Es seien ferner mn, no und op, Fig. 23, drei unendlich kleine geradlinige Elemente der Linie ab, R_1 und R_2 die den Punkten n und o entsprechenden Krümmungshalbmesser dieser Linie. Nimmt man die Länge aller dieser Theilchen gleich dl an, so ist die Kraft dP_1, welche auf den Punkt n wirkt und ihrer Richtung nach den Winkel mno halbirt, gleich:

$$dl\left[p_1 + \frac{s v^2 b_1}{g R_1}\left(1 - \frac{b_1}{2R_1}\right)\right]$$

und die in o ähnlich wirkende Kraft dP_2 gleich:

$$dl\left[p_1 + \frac{s v^2 b_1}{g R_2}\left(1 - \frac{b_1}{2R_2}\right)\right]$$

Zerlegt man diese beiden Kräfte in eine parallel und eine senkrecht auf no wirkende Kraft, so ist die erstere Theilkraft von dP_1 gleich $dP_1 \frac{dl}{2R_1}$ und die entsprechende von dP_2 gleich $dP_2 \frac{dl}{2R_2}$. Soll das Bogenstück no im Gleichgewichte sein, so müssen diese beiden Theilkräfte gleich sein. Führt man in dieselben für dP_1 und dP_2 die angegebenen Werthe ein, so erhält man daher als Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes des Theilchens no:

$$\left[p_1 + \frac{sv^2b_1}{gR_1}\left(1 - \frac{h_1}{2R_1}\right)\right]\frac{1}{R_1} = \left[p_1 + \frac{sv^2b_1}{gR_2}\left(1 - \frac{b_1}{2R_2}\right)\right]\frac{1}{R_2}$$

Da diese Gleichung für alle möglichen Werthe von p_1, s, v und b_1 bestehen soll, so muß nothwendig $R_1 = R_2$ sein, d. h. die Punkte m, n, o und p müssen in dem gleichen Kreise liegen. Was hier von einem unendlich kleinen Stücke der Linie ab gesagt wurde, gilt von jedem andern ebenfalls, so daß also überall nicht nur drei, sondern je vier gleich weit von einander entfernte, aber unendlich nahe bei einander liegende Punkte im gleichen Kreise liegen müssen, mithin die ganze Linie abcd ein Kreis sein muß, wenn sich die von der Flüssigkeit auf sie ausgeübten Pressungen im obigen Sinne an ihr Gleichgewicht halten sollen. Denkt man sich diese Gefäßwand vollkommen biegsam, so wird sie daher, mag sie im Anfange der Bewegung was immer für eine Gestalt gehabt haben, von der wirbelnden Flüssigkeit zu einem Kreise gebogen werden. Ist sie steif, so widersteht sie zwar dieser Formveränderung ganz oder theilweise, dennoch aber behält die wirbelnde Flüssigkeit das Bestreben, der Wand die kreisförmige Gestalt mitzutheilen.

Bewegung eines geraden runden Flüssigkeitstrahles.
(Fig. 24.)

Es soll hier nicht jene Bewegung eines solchen Strahles betrachtet werden, die derselbe etwa unter dem Einflusse der Schwere erhält, bei welcher sich seine Axe nahezu parabolisch krümmt, sondern jene, die er durch ein widerstehendes Hinderniß, das ihn

nach allen Seiten von seiner Axe aus symetrisch vertheilt, anzunehmen genöthigt wird. Dieser Fall kann im Allgemeinen durch Fig. 24 dargestellt werden. BC stelle den noch unzertheilten Wasserstrahl vor; A einen Umdrehungskörper, dessen Axe in die Verlängerung der Strahlaxe fällt und bei C den Strahl zu vertheilen anfängt. Betrachtet man diese Axe als Abszissenaxe, so sei die Ordinate irgend eines Punktes m der Umdrehungsfläche gleich Y und die zugehörige Normale gleich N. Ist ferner mn der Durchschnitt der durch m gehenden Normalfläche des Strahles, so bedeute y^1 die Ordinate irgend eines Punktes o dieser Normalfläche. Endlich bezeichne, ähnlich wie in den frühern Fällen, R den Krümmungshalbmesser der Linie mC bei m, b^1 und b den Bogen no und nm, $b_1{}^1$ und b_1 die den gleichen Elementarkanälen entsprechenden Bogen n_1o_1 und n_1m_1 und zwar an einer Stelle des Strahles, wo er noch seine gerade cylindrische Gestalt vollkommen besitzt. Es wird wiederum vorausgesetzt, die Geschwindigkeit der Flüssigkeit sei in allen Punkten dieser letztern Normalfläche gleich groß. Alsdann hat man zur Berechnung der Bewegung in der Normalfläche mn aus Nr. 12_b die Gleichungen:

(18)

1) . . . $$v = \sqrt{\frac{2g}{s}(p_1 - p) + v_1{}^2}$$

2) . . $$\left\{\begin{array}{l} v^1 = v\left(1 - \frac{r-R}{rb} b^1\right)^{\frac{b}{r-R}} \\ V = v\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{b}{r-R}} \end{array}\right\}$$ wenn $\frac{R}{r}$ kleiner als 1 ist.

3) . . $$\left\{\begin{array}{l} v^1 = v\,\frac{rRb}{rRb + Rbb^1 - \frac{1}{2}(R-r)b^{12}} \\ V = \frac{vrR}{rR + \frac{1}{2}(r+R)b} \end{array}\right.$$

wenn $\frac{R}{r}$ größer als 1 ist.

Diese Gleichungen weichen, wie man sieht, in nichts von den

Gleichungen 13, 1 und 13, 2 ab. Um so mehr ist dieses dagegen bei den nun folgenden Gleichungen der Fall. Bei der Bestimmung der Größe d in der Gleichung 12, 5 müssen vor Allem zwei verschiedene Fälle unterschieden werden. Ist nämlich für irgend eine Normalfläche mn die Ordinate Y im Verhältniß zu m_1n_1 groß, so hat sich die Flüssigkeit an dieser Stelle schon bedeutend vertheilt und die Linie mn, die dann im Verhältniß zu m_1n_1 nur noch klein sein wird, kann ohne Fehler als eine Gerade angenommen werden, welche in die Verlängerung der Normale N fällt. Nun ist die Dimension d, oder die senkrecht auf der Linie m_1n_1 stehende Dimension des durch o_1 gehenden Elementarkanales, nichts anderes als die Länge des ganzen Kreises, dessen Halbmesser m_1o_1 oder $b_1 - b_1^1$ ist, so daß man:

$$d_1 = 2(b_1 - b_1^1)\,\pi$$

hat. Eben so ist die Dimension d für denselben Elementarkanal bei dem Punkte o gleich der Länge des Kreises, dessen Halbmesser y^1 ist. Da nun mn als eine Gerade und Normale auf der Linie Cm angenommen werden kann, so hat man die Proportion:

$$y^1 : Y = (N + b - b_1) : N, \text{ oder}$$

$$y^1 = Y\left(1 + \frac{b - b^1}{N}\right)$$

und daher:

$$d = 2Y\left(1 + \frac{b - b^1}{N}\right)\pi$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung 12, 5 hinein, so erhält man:

$$(b_1 - b_1^1)\, v_1\, db_1 = Y\left(1 + \frac{b - b^1}{N}\right) v^1\, db^1$$

wo v^1 die Geschwindigkeit bei o bedeutet.

Setzt man in diese Gleichungen die in 18, 2 und 18, 3 angegebenen Werthe von v^1 ein und integrirt in Bezug auf b^1 zwischen den Grenzen $b^1 = o$ und $b^1 = b^1$, so erhält man folgende Gleichungen:

Wenn $\frac{R}{r}$ kleiner als 1 ist.

$$(18_4)\quad A\left(b_1 b_1{}^1 - \frac{b_1{}^{12}}{2}\right) =$$

$$Y\left(1+\frac{b}{N}\right)\frac{rb(-B+1)}{b-R+r} - \frac{Y}{NC}\left(-\frac{b^1(b-R+r)\frac{1}{rb}+1}{B^{-1}}+1\right)$$

worin:

$$A = \frac{v_1}{v},\quad B = \left(1-\frac{r-R}{rb}b^1\right)^{1-\frac{b}{R-r}}\ \text{und}$$

$$C = \left(\frac{b}{R-r}-2\right)\left(\frac{b}{R-r}-1\right)\left(\frac{R-r}{rb}\right)^2$$

zu setzen ist.

Wenn $\frac{R}{r}$ dagegen größer als 1 ist, erhält man:

$$(18_5)\quad A\left(b_1 b_1{}^1 - \frac{b_1{}^{12}}{2}\right) = YrRb\left\{\left(1+\frac{br}{(R-r)N}\right)\frac{1}{B_1}\times\right.$$

$$\left.\log n\frac{(C_1-B_1)(Rb+B_1)}{(C_1+B_1)(Rb-B_1)}+\frac{1}{(R-r)N}\log n\, D_1\right\}$$

worin:

$$A = \frac{v_1}{v},\quad B_1 = \sqrt{R^2b^2+2Rrb(R-r)},\quad C_1 = Rb-(R-r)b^1$$

$$\text{und}\ D_1 = \frac{Rrb+Rbb^1-\frac{R-r}{2}b^{12}}{Rrb}$$

zu setzen ist:

Setzt man in diesen Gleichungen $b^1 = b$, so erhält man zur Berechnung der ganzen Linie mn oder b folgende Gleichungen:

Wenn $\frac{R}{r}$ kleiner als 1 ist:

$$(18_6)\quad A\frac{b_1{}^2}{2} = Y\left(1+\frac{b}{N}\right)\frac{rb(1-B)}{b+r-R}+\frac{Y}{NC}\left(\frac{b+2r-R}{r}B-1\right)$$

worin:

$$A = \frac{v_1}{v}, \quad B = \left(\frac{R}{r}\right)^{1 + \frac{b}{r-R}},$$

$$C = \left(\frac{b}{R-r} - 2\right)\left(\frac{b}{R-r} - 1\right)\left(\frac{r-R}{rb}\right)^2$$

Wenn $\frac{R}{r}$ größer als 1 ist:

$$(18_7) \quad A \frac{b_1^2}{2} = YrRb \left\{ \left(1 + \frac{br}{N(R-r)}\right)\frac{1}{B_1} \times \right.$$

$$\left. \log n \frac{(rb-B_1)(Rb+B_1)}{(rb+B_1)(Rb-B_1)} + \frac{1}{(R-r)N} \log n D_1 \right\}$$

worin:

$$A = \frac{v_1}{v}, \quad B_1 = \sqrt{R^2b^2 + 2Rrb(R-r)},$$

$$D_1 = \frac{Rr + \frac{1}{2}(R+r)b}{Rr}$$

Einer besondern Betrachtung muß die Bewegung des Strahles vor seiner Ankunft bei C unterworfen werden, wo er zwar noch ungetheilt ist, dennoch aber seine cylindrische Gestalt schon verloren und einen größern Querschnitt angenommen hat. Hier kann man zur Bestimmung der Dimension d für irgend einen durch o, Fig. 25, gehenden Elementarkanal etwa folgende Wege einschlagen. Denkt man sich, daß statt der doppelgekrümmten Normalfläche mon die Kegelfläche m^1n gesetzt werde, deren Erzeugungslinie m^1n gleich mn oder gleich b sei, so hat man für den durch o gehenden Elementarkanal:

$d = 2\pi y^1 = 2\pi y \frac{b-b^1}{b}$, ferners ist für o_1: $d_1 = 2\pi\ (b_1 - b_1^1)$.

Daher ergibt sich aus Gleichung 12, 5 mit Benutzung dieser Werthe die Gleichung:

$$(b_1 - b_1^1)\ db_1^1\ v_1 = y \frac{b-b^1}{b}\ db^1\ v^1$$

Setzt man in dem durch Gleichung 18, 3 ausgedrückten Werthe für v^1 den Halbmesser $R = \infty$, führt den daraus hervorgehenden Werth von v^1 in die so eben erhaltene Gleichung und integrirt auf der linken Seite zwischen den Grenzen o und b_1^1, auf der rechten zwischen o und b^1, so erhält man die Geichung:

$$(18_9) \ldots A\left(b_1 b_1{}^1 - \frac{b_1{}^{12}}{2}\right) = ry \log n\left(1 + \frac{bb^1 - \frac{1}{2} b^{12}}{rb}\right)$$

und für den Fall da $b^1 = b$ ist und $b_1{}^1 = b_1$:

$$(18_{10})\ A\,\frac{b_1{}^2}{2} = ry \log n\left(1 + \frac{b}{2r}\right) \text{ oder}$$

$$b = 2r\left(e^{\frac{A b_1{}^2}{2ry}} - 1\right)$$

In beiden Gleichungen ist wie oben $A = \frac{v_1}{v}$.

Zur Berechnung der Coordinaten der Linie $n_1 n$, bezogen auf die Abszissenaxe $m_1 m$, kann ein ganz ähnlicher Weg eingeschlagen werden, wie bei dem rechteckigen Flüssigkeitsstrahle mit unendlich großem R. Auch hier können nämlich die dort angegebenen Gleichungen:

$$\triangle x_\alpha = \frac{\triangle b_\alpha \cos \psi_{\alpha-1}}{\operatorname{tang} \psi_{\alpha-1}},\quad \triangle y_\alpha = \triangle b_\alpha \cos \psi_{\alpha-1},$$

$$\psi_\alpha = \psi_{\alpha-1} + \frac{\triangle b_\alpha}{r_{\alpha-1} \operatorname{tang} \psi_{\alpha-1}}$$

$$x = \triangle x_1 + \triangle x_2 + \ldots \triangle x_\alpha + \text{const.},$$

$$y = \triangle y_1 + \triangle y_2 + \ldots \triangle y_\alpha + \text{const.}$$

angewendet werden; nur bringt die Anwesenheit von y in der Formel zur Berechnung von b einige Verschiedenheit in den Gebrauch dieser Gleichungen hinein. Da man bei der Berechnung irgend eines Werthes von b den zugehörigen Werth von y noch nicht kennt, so bleibt nichts andres übrig, als in Gleichung 18, 10 für y den nächst kleineren bekannten Werth dieser Größe einzuführen, in welchem Falle es nothwendig ist, je zwei unmittelbar auf einander folgende Werthe von r möglichst wenig verschieden anzunehmen; oder man kann auch zu dem nächst vorhergehenden Werthe von y zur Berechnung des Bogens b so viel zusetzen, um wie viel man etwa glaubt, daß diese Größe zunehmen möchte. Um mit diesen Rechnungen den Anfang machen zu können, muß wieder, wie bei jenem früher behandelten ähnlichen Falle, für irgend einen

sehr großen Werth von r die Größe des Winkels ψ berechnet werden, der alsdann durch $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt werden kann. Da alsdann $b = y$ gesetzt werden kann, so erhält man aus Gleichung 18, 10, mit Beibehaltung der zwei ersten Glieder der Logarithmenreihe:

$$Ab_1^2 = y^2 - \frac{y^3}{4r}$$

Setzt man $r = -\frac{dx^2}{d^2y}$ und $z = \frac{dy}{dx}$, so erhält man hieraus:

$$\frac{Ab_1^2 - y^2}{y3} = -\frac{zdz}{dy}$$

und durch Integration zwischen den Grenzen b_1 und y in Bezug auf y und den Grenzen o und z oder $\frac{dx}{dy}$ in Bezug auf z:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{-4\,A\left(1 - \frac{b_1^2}{y2} + 8 \log n \frac{y}{b_1}\right.}$$

und angenähert:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{2\frac{y}{b_1} + A\frac{y^2}{b_1^2} - (A+2)}$$

Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = \psi$, so kann die oben angedeutete Rechnung begonnen und auf die angezeigte Weise fortgesetzt werden.

Ein anderer Weg zur annäherungsweisen Bestimmung der Linie n_1n ist folgender. Man sehe die Normalfläche mon als eine Kugelfläche mit dem Halbmesser L an. Alsdann kann y^1 angenähert durch einen Ausdruck von der Gestalt

$$\frac{b - b^1}{1 + m\left(\frac{b - b^1}{L}\right)^2}$$

bestimmt werden, worin m eine Constante ist. Bedenkt man, daß für $b^1 = o$ und $b = \frac{L\pi}{2}$, d. h. für den Fall, wo der Bogen mon ein Viertelkreis wird, dieser Ausdruck den Werth L erhalten

muß, so findet man, daß demselben für m die Ziffer 0,2313 entspricht. Man kann daher angenähert setzen:

$$y^1 = \frac{b - b^1}{1 + 0{,}2313 \left(\frac{b - b^1}{L}\right)^2}$$

Führt man diesen Werth in den Ausdruck für d ein und verfährt dann ganz wie oben, so erhält man durch Integration von b^1 und b die Gleichungen:

$$(18_{11}) \ldots A\left(b_1 b_1{}^1 - \frac{b_1{}^{12}}{2}\right) = \frac{rL^2 b}{0{,}2313\,(2r+b)\,b+L^2} \times \log n \frac{(L^2 + 0{,}2313\,b^2)\,[(b+2r)\,b - (b-b^1)^2]}{2rb\,[L^2 + 0{,}2313\,(b-b^1)^2]}$$

$$(18_{12}) \ldots A\,\frac{b_1{}^2}{2} = \frac{rL^2 b}{0{,}2313\,(2r+b)\,b+L^2} \times \log n \frac{(L^2 + 0{,}2313\,b^2)\,(b+2r)}{2rL^2}$$

worin A wieder gleich $\frac{v_1}{v}$ ist.

Um mit Anwendung dieser Formel eine Zeichnung von der Linie $n_1 n$ zu entwerfen, berechne man für irgend einen großen Werth von r, für welchen L noch unendlich groß angenommen werden kann, die Länge des Bogens b. Man erhält in diesem Falle aus Gleichung 18, 12:

$$A\,\frac{b_1{}^2}{2} = b\left(\frac{b}{2} - \frac{b^2}{8r}\right)$$

Setzt man in dieser Formel $b = y$, so stimmt sie vollständig mit den aus Nr. 18, 10 abgeleiteten Gleichungen überein; weßhalb für diesen Fall auch die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{A + 2 - 2\,\frac{y}{b_1} - A\,\frac{y^2}{b_1{}^2}}$$

zur Berechnung des kleinen Winkels $\frac{dy}{dx}$ benutzt werden kann. Mittelst dieses Winkles trage man den berechneten Bogen b auf und suche auf mm_1 einen Punkt, von welchem aus ein mit b möglichst nahe

zusammenfallender Bogen gezeichnet werden kann. Den diesem Kreise entsprechenden Halbmesser benutze man zur Berechnung des nächsten Bogens b, für welchen r etwas kleiner als beim vorigen angenommen werden muß. Von nun an verfahre man ganz ähnlich wie bei Verzeichnung der Linie $n_1 n$ für einen rechteckigen Flüssigkeitsstrahl, was bei Fig. 20 beschrieben wurde, mit dem einzigen Unterschiede, daß zur Berechnung der verschiedenen Werthe von b immer die Gleichung 18, 12 gebraucht werden muß, und daß dabei die Größen L zu berücksichtigen sind, deren Werthe für jeden zu berechnenden Bogen b bei dem zunächst vorher aufgetragenen Bogen von der Zeichnung abgemessen werden müssen. Die Größen x und y können also hier nicht unmittelbar durch die Rechnung bestimmt werden, sondern nur mit Beihülfe der Zeichnung; deßhalb können die Werthe derselben auch am besten aus der Zeichnung durch Messung entnommen werden.

In folgender Tafel sind die Werthe von x und y enthalten, sowohl wie sie sich durch Berechnung mittelst der Gleichung 18, 10 als auf dem zuletzt genannten Wege ergeben. Zum bequemeren Gebrauche der Gleichungen 18, 10 und 18, 12 ist in denselben r = mb gesetzt worden, wodurch man für b dann die Ausdrücke:

$$\text{a)} \ldots\ldots b = \frac{b_1^2}{2\,my\,\log n\left(1 + \frac{1}{2m}\right)}$$

und

$$\text{b)} \ldots\ldots b = \frac{b_1}{M}\sqrt{\frac{0{,}2313\,(2m+1) + M^2}{2m\log n\,\frac{(M^2 + 0{,}2313)\,(1+2m)}{2mM^2}}}$$

erhält.

m	r	b	x	y	ψ
100	100,124 b_1	1,001 b_1		1,001 b_1	0° 0 0
60	60,037 „	1,002 „	2,010 b_1	1,002 „	0° 36′
30	30,120 „	1,004 „	1,847 „	1,004 „	0° 43′
20	20,124 „	1,006 „	1,670 „	1,006 „	1° 1′
10	10,123 „	1,012 „	1,328 „	1,012 „	1° 56′
8	8,122 „	1,015 „	1,239 „	1,015 „	2° 26′
6	6,123 „	1,021 „	1,116 „	1,021 „	3° 15′
4	4,120 „	1,030 „	0,947 „	1,030 „	4° 45′
3	3,119 „	1,040 „	0,832 „	1,040 „	6° 21′
2,5	2,618 „	1,047 „	0,765 „	1,047 „	9° 34′
2,0	2,117 „	1,059 „	0,681 „	1,058 „	9° 23′
1,5	1,615 „	1,076 „	0,574 „	1,076 „	12° 19′
1,0	1,111 „	1,111 „	0,420 „	1,111 „	17° 53′
0,8	0,910 „	1,137 „	0,343 „	1,135 „	22° 0′
0,6	0,705 „	1,176 „	0,254 „	1,170 „	28° 0′
0,5	0,603 „	1,206 „	0,204 „	1,200 „	32° 36′
0,45	0,551 „	1,225 „	0,179 „	1,213 „	35° 19′
0,40	0,500 „	1,250 „	0,150 „	1,234 „	39° 2′
0,35	0,448 „	1,280 „	0,121 „	1,257 „	43° 14′
0,30	0,396 „	1,321 „	0,089 „	1,287 „	48° 45′
0,26	0,355 „	1,364 „	0,065 „	1,315 „	54° 3′
0,23	0,323 „	1,405 „	0,047 „	1,339 „	58° 52′
0,20	0,292 „	1,460 „	0,030 „	1,367 „	64° 40′
0,18	0,271 „	1,507 „	0,021 „	1,387 „	68° 53′
0,16	0,251 „	1,568 „	0,012 „	1,409 „	73° 48′
0,14	0,228 „	1,630 „	0,007 „	1,426 „	77° 54′
0,12	0,210 „	1,749 „	0,002 „	1,451 „	84° 13′
0,10	0,190 „	1,903 „	0,000 „	1,467 „	88° 26′
			0,000 „	1,472 „	90° 0′

m	r	b	x	y	L
100	100,303 b_1	1,000 b_1		1,000 b_1	
60	60,104 "	1,002 "		1,002 "	
30	30,117 "	1,004 "		1,004 "	
20	20,128 "	1,006 "		1,006 "	
10	10,123 "	1,012 "		1,012 "	
8	8,122 "	1,015 "		1,015 "	
6	6,122 "	1,020 "		1,020 "	
4	4,121 "	1,030 "		1,130 "	
3	3,117 "	1,039 "	0,880 b_1	1,039 "	10,86 b_1
2	2,118 "	1,059 "	0,692 "	1,059 "	8,13 "
1	1,112 "	1,112 "	0,453 "	1,112 "	4,098 "
0,8	0,912 "	1,140 "	0,368 "	1,140 "	3,26 "
0,6	0,710 "	1,183 "	0,271 "	1,183 "	2,64 "
0,4	0,503 "	1,258 "	0,168 "	1,258 "	2,13 "
0,3	0,400 "	1,333 "	0,096 "	1,320 "	1,79 "
0,2	0,293 "	1,466 "	0,033 "	1,412 "	1,58 "
0,15	0,189 "	1,595 "	0,009 "	1,470 "	1,52 "
0,10	0,180 "	1,798 "	0,000 "	1,520 "	

Der letzte Werth von $\triangle y$ in der durch Anwendung der Gleichung a gebildeten Tafel wurde einfach durch die Formel:

$$\triangle y = r \sin [90 - (88^0 6')]$$

bestimmt, worin $r = 0,190$ gesetzt wurde. Durch Vergleichung der Größen r, b, x und y, die durch die beiden verschiedenen Bestimmungsarten erhalten wurden, bemerkt man, daß die Verschiedenheit der Werthe für y nur in der Nähe jenes Punktes etwas bedeutender zu werden beginnt, wo die Tangente der Linie n_1n senkrecht zu der Abszisse m_1m steht, daß im Ganzen aber sämmtliche Werthe eine erwünschte Uebereinstimmung zeigen. Mit Anwendung der in dieser Tafel enthaltenen Werthe von y und x ist es nun ein Leichtes, die Linie n_1n zu verzeichnen.

Endlich ergeben sich aus der Gleichung 18, 1 zur Berechnung der Pressungen p^1 und P noch die Gleichungen:

$$(18_{13}) \ldots p^1 = p_1 + s\,\frac{v_1^2 - v^{12}}{2g}, \text{ und } P = p_1 + s\,\frac{v_1^2 - V^2}{2g}$$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über die Bewegung eines geraden runden Flüssigkeitsstrahles müssen nun, wie bei der Bewegung des rechteckigen gekrümmten Strahles, mehrere einzelne Fälle besonders herausgehoben werden.

Beide Krümmungshalbmesser R sind gleich, oder R = r.

Dieser Fall bietet beim getheilten Wasserstrahle bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten dar, denn beim ungetheilten, wo R und daher auch r unendlich groß sein müßte, kömmt man auf die cylindrische geradlinige Gestalt. Die allgemeinen Ausdrücke für v^1 und V in den Gleichungen 18, 1, 18, 2 und 18, 3 nehmen hier offenbar ganz dieselbe Gestalt an wie in den Gleichungen 14, 1 und 14, 2. Wegen der Gleichungen

$$d = 2Y\left(1 + \frac{b - b^1}{N}\right)\pi \text{ und } d_1 = 2(b_1 - b_1{}^1)\pi$$

erhält man dagegen jetzt unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung

12, 5, mit Einführung des soeben berührten Werthes von v^1, die Gleichung:

$$(b_1 - b_{\iota}{}^1) db_1 \frac{v_1}{v} = Y \left(1 + \frac{b - b_{\iota}}{N}\right) \frac{db}{e^{\frac{b^1}{R}}}$$

Setzt man für $\frac{v_1}{v}$ wie oben A und integrirt zwischen den Grenzen o, $b_{\iota}{}^1$ und o, b^1, so erhält man:

$$A(b_{\iota} b_{\iota}{}^1 - \tfrac{1}{2} b_{\iota}{}^{12}) = YR \left\{ \left(1 - e^{-\frac{b^1}{R}}\right)\left(1 - \frac{R}{N}\right) + \frac{b^1}{N} - \frac{b - b^1}{N} e^{-\frac{b^1}{R}} \right\}$$

woraus sich, indem man $b_{\iota}{}^1 = b_{\iota}$ und $b^1 = b$ setzt, sogleich auch die Gleichung für Berechnung von b durch b_1 ergibt. Für Berechnung von p^1 und P müssen die Gleichungen 18, 13 in der Gestalt die sie dort haben angewendet werden. Die Bewegung kann daher im vorliegenden Falle durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

(19)

1) $v = \sqrt{2g(p_{\iota} - p) + v_1^2}$

2) $v^1 = \frac{v}{e^{\frac{b^1}{R}}}$, $V = \frac{v}{e^{\frac{b}{R}}}$

3) $A(b_1 b_{\iota}{}^1 - \tfrac{1}{2} b_1{}^{12}) = YR \left\{ \left(1 - e^{-\frac{b^1}{R}}\right)\left(1 - \frac{R}{N}\right) + \frac{b^1}{N} - \frac{b - b^1}{N} e^{-\frac{b_{\iota}}{R}} \right\}$

4) $A \frac{b_1^2}{2} = YR \left\{ \left(1 - e^{-\frac{b}{R}}\right)\left(1 - \frac{R}{N}\right) + \frac{b}{N} \right\}$

5) $p^1 = p_1 + s \frac{v_1^2 - v^{12}}{2g}$, $P = p_{\iota} + s \frac{v_1^2 - V^2}{2g}$

Für besondere Fälle, die hier eintreten können, verändern diese Gleichungen ihre Gestalt etwas. So wird z. B. für den Punkt m^1 der Figur 24 die Normale N unendlich groß, während Y gleich der endlichen Entfernung dieses Punktes von der Axe m_1M ist. Dadurch verändern sich nun die Gleichungen 19, 3 und 19, 4 und erhalten die einfachere Gestalt:

$$(19_6) \; . \; . \; . \; . \; A(b_1 b_1{}^1 - \tfrac{1}{2} b_1{}^{12}) = YR\left(1 - e^{-\frac{b^1}{R}}\right)$$

$$(19_7) \; . \; . \; . \; . \; A\,\frac{b_1{}^2}{2} = YR\left(1 - e^{-\frac{b}{R}}\right)$$

Für Punkte die weiter von m_1M_1 entfernt sind als m^1 wird N negativ.

Ist der widerstehende Umdrehungskörper A ein Kegel, so ist das Verhältniß $\frac{Y}{N}$ constant und R wird unendlich groß; daher erhält man aus Gleichung 19, 3 und 19, 4, oder unmittelbar aus dem obigen Ausdrucke für $(b_1 - b_1{}^1)\,db_1\,\frac{v_1}{v}$ durch Integration die einfachen Gleichungen:

$$(19_8) \; . \; . \; . \; . \; A(b_1 b_1{}^1 - \tfrac{1}{2} b_1{}^{12}) = Y\left[\left(1 + \frac{b^1}{N}\right)b^1 - \frac{b^{12}}{2N}\right]$$

$$(19_9) \; . \; . \; . \; . \; A\,\frac{b_1{}^2}{2} = Y\left(\frac{b^2}{2N} + b\right)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich auch sogleich jene, die zur Berechnung eines senkrecht auf eine Ebene fließenden Flüssigkeitsstrahles geeignet sind, weil man eine Ebene als einen Kegel mit einem Scheitelwinkel von 180° ansehen kann, für welchen daher $N = \infty$ gesetzt werden muß.

Die Gleichungen 19, 1 bis 19, 9 können für alle diejenigen Fälle als angenähert richtig betrachtet werden, in denen R und Y im Verhältnisse zu b_1 ziemlich groß sind und können daher namentlich auf die von der Axe m_1M_1 ziemlich weit entfernten Punkte des getheilten Flüssigkeitsstrahles angewendet werden.

Der Krümmungshalbmesser R sei gleich Null, oder der Strahl werde von der Spitze eines Kegels getheilt. (Fig. 26.)

Die Gleichungen 18, 1, 18, 2, 18, 4, 18, 6 und 18, 13 nehmen folgende Gestalt an, wenn in denselben R = o gesetzt wird:

(20)

$$1)\quad v = \sqrt{\frac{2g}{s}(p_1 - p) + v_1^2}$$

$$2)\quad v^1 = v\left(1 - \frac{b^1}{b}\right)^{\frac{b}{r}}, \quad V = o.$$

$$3)\quad A\left(b_1 b_1{}^1 - \frac{b_1{}^{12}}{2}\right) = Y\left(1 + \frac{b}{N}\right)\frac{rb(1-B)}{b+R} - \frac{Y}{NC}\left(1 - \left[b^1\left(\frac{b+r}{rb}\right) + 1\right]B\right)$$

worin $B = \left(1 - \frac{b^1}{b}\right)^{1 + \frac{b}{r}}$

und $C = (b+2r)(b+r)\frac{1}{b^2r^2}$ ist;

$$4)\quad A\frac{b_1^2}{2} = Yrb\left\{\frac{1}{r+b} + \frac{b}{N(2r+b)}\right\}$$

$$5)\quad p^1 = p_1 + s\,\frac{v_1{}^2 - v^2}{2g}, \quad P = p_1 + s\,\frac{v_1^2}{2g}$$

In diesen Gleichungen ist wie vorhin $A = \frac{v_1}{v}$. Zur angenäherten Bestimmung von r kann hier wieder, wie in dem entsprechenden Falle beim rechteckigen Strahle, die Annahme gemacht werden, die Linie $n_1 n n_2$ sei eine Hyperbel, deren Assymptoten $o_1 o m_2$ seien, indem $o_1 o$ die Verlängerung des ursprünglichen, unter dem Drucke p gedachten Strahles ist. Freilich wird diese Annahme hier der Wahrheit nicht so nahe kommen wie dort, weil das Linienstück nn_2 nicht genau symetrisch mit dem andern nn_1 sein wird. Als reelle Axe der Hyperbel kann alsdann no

angenähert gleich n_3s oder $n_3C - sC = b - \frac{\sqrt{A}\, b_1 \cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}$, angenommen werden. Alsdann hat man, ganz ähnlich wie in dem berührten Falle des rechteckigen Strahles:

$$(20_6) \;\ldots\; r = \left(b - b_1\sqrt{A}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}\right)\tang^2\frac{\varphi}{2} = \left(b - \frac{b_1\sqrt{A}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\right)\tang^2\frac{\varphi}{2}$$

Nimmt man nun an, r sei für den Punkt n_3 eben so groß wie für n und setzt diesen Werth von r in die Gleichung für b_1 hinein, so erhält man, da Y für den Punkt $C = o$ ist:

$$A\,\frac{b_1^2}{2} = \frac{Yb^2}{N}\;\frac{\left(b - \frac{b_1\sqrt{A}}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)\tang^2\frac{\varphi}{2}}{2\left(b - \frac{b_1\sqrt{A}}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)\tang^2\frac{\varphi}{2} + b}$$

Das Verhältniß $\frac{Y}{N}$ ist für alle Punkte der Kegelfläche gleich $-\cos\varphi$, für alle Punkte der Linie Cm aber gleich 1 oder cos 0. Nimmt man daher an, in C sei die Wendung des mittleren Elementarkanales zur Hälfte, also um den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$, ausgeführt, so kann am passendsten $\frac{Y}{N} = \cos\frac{1}{2}\varphi$ gesetzt werden. Obige Formel gibt alsdann:

$$(20_7) \;\ldots\; A\,\frac{b_1^2}{2} = \frac{b^2\left(b - \frac{b_1\sqrt{A}}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\left[2\left(b - \frac{b_1\sqrt{A}}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)\tang^2\frac{\varphi}{2} + b\right]\cos\frac{\varphi}{2}}$$

Will man die Größe on oder b_2 berechnen, so kann dieß angenähert mittelst der Gleichung 18_7 geschehen, wenn in derselben $R = \infty$, $Y = b_1\sqrt{A}$, $\frac{Y}{N} = -\cos\varphi$ und für r der

Werth $b_2 \tang^2 \frac{\varphi}{2}$ eingesetzt wird. Man erhält daher zur Bestimmung von on die beiden Gleichungen:

$$(20_8) \left\{ \begin{aligned} & A \frac{b_1}{2} = \frac{b_2 \sqrt{A} \tang^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 + 2 \tang^2 \frac{\varphi}{2}}} \times \log n \frac{1 + \sqrt{1 + 2 \tang^2 \frac{\varphi}{2}}}{-1 + \sqrt{1 + 2 \tang^2 \frac{\varphi}{2}}} \\ & on = b_2 = A \frac{b_1}{2} \frac{\sqrt{1 + 2 \tang^2 \frac{\varphi}{2}}}{\log n \frac{1 + \sqrt{1 + 2 \tang^2 \frac{\varphi}{2}}}{-1 + \sqrt{1 + 2 \tang^2 \frac{\varphi}{2}}}} \end{aligned} \right.$$

worin nun b_2 die Linie no bedeutet.

Fließt der Strahl senkrecht gegen eine Ebene, so wird $\varphi = 90^0$, und man erhält alsdann:

zur Berechnung von Cn_3

$$A \frac{b_1^2}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \frac{b^3 - b^2 b_1 \sqrt{\tfrac{1}{2} A}}{3b - b_1 \sqrt{2A}},$$

oder wenn $A = 1$, nahe:

$$b = 1{,}63\ b_1.$$

Zur angenäherten Berechnung von no:

$$A \frac{b_1}{2} = 0{,}7599\ b_2 \sqrt{A},\quad b_2 = 0{,}6580\ b_1 \sqrt{A}.$$

Die Berechnung von no kann deßhalb nur als eine angenäherte gelten, weil durch Gleichung 18, 7 die Länge eines Bogens berechnet wird, der von o aus bis zum Punkte n_4 der Oberfläche des Strahles geht und überall normal auf den Elementarkanälen steht, eine Linie die von der Geraden no der Richtung und Gestalt nach merklich abweicht. Die Gestalt des Strahles wird daher

genauer bestimmt, wenn man annimmt, der obige Werth von b_2 bedeute die Größe der Linie n_4o. — Der obige Werth von b oder Cn_3 ist um so näher richtig, je größer φ ist, weil dann die Krümmung der Linie n_1nn_2 in den Punkten n und n_3 weniger ungleich ist. Dagegen folgt aus obigen Gleichungen mit Nothwendigkeit, daß sowohl bei einem Kegel als einer Ebene im Punkte C, wo die Axe des Strahles die widerstehende Fläche trifft, die Geschwindigkeit gleich Null ist, von da an aber gegen die Oberfläche des Strahles hin allmählig zunimmt. Es würde sich also zwar keine stillstehende Flüssigkeitsmasse von endlicher Ausdehnung vorfinden, wohl aber der ganze Strahl in Schichten zerfallen, die bei einem senkrecht auf die Axe des Strahles geführten Querschnitte ringförmig erscheinen und in welchen die Geschwindigkeit um so kleiner wird, je näher sie bei der Axe liegen. Wird der Querschnitt in einiger Entfernung von C durch den noch unzertheilten Strahl geführt, so besitzt die im Mittelpunkte befindliche Flüssigkeit auch noch eine endliche Geschwindigkeit; diese wird aber um so kleiner, je näher man den Querschnitt gegen C rückt und nimmt in C selbst den Werth Null an. — Der Druck im Punkte C ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Höhe gleich der Geschwindigkeitshöhe des Strahles ist.

Ausfluß von Flüssigkeiten aus Gefässen.

Fließt eine Flüssigkeit, deren Spiegel in einem Gefässe immer die gleiche Höhe behält, durch irgend eine in einer Wand des Gefässes angebrachte Oeffnung aus, so bleibt die Gestalt des ausfließenden Strahles, sowie die Geschwindigkeit der durch irgend einen Punkt desselben strömenden Flüssigkeit immer unverändert. Die bisher entwickelten Grundsätze über die Bewegung der Flüssigkeiten müssen daher auch auf diesen Fall angewendet werden können. Die Möglichkeit, durch diese Anwendungen Ergebnisse zu erhalten, welche der Wahrheit nahe stehen, wird aber dadurch auf eine kleinere Zahl von Fällen beschränkt, daß bei jenen Sätzen weder der Einfluß der Reibungen der Flüssigkeitstheilchen an den Gefäßwän=

den und an einander selbst, noch auch, was hier besonders wichtig ist, die Anziehungskraft der Wände gegen die Flüssigkeit und der Flüssigkeitstheilchen gegen einander berücksichtigt wurde. Aber auch in den Fällen, wo diese Kräfte einen geringern Einfluß ausüben, wird die Bewegung so zusammengesetzt, daß dieselbe mittelst jener Sätze nur bis zu einem gewissen Punkte bestimmt werden konnte. Da mir jedoch auch in diesem Wenigen Einiges enthalten zu sein scheint, was zur theoretischen Erklärung jener Bewegung etwas beiträgt, so lege ich die dießfälligen Ergebnisse hier nieder.

Zunächst muß in allen Fällen bei Ausflußöffnungen mit und ohne Ansatzröhren und von jeder Gestalt, der aus derselben herausgetretene freie Strahl unterschieden werden von der noch im Gefäß enthaltenen, in der nächsten Umgebung der Oeffnung befindlichen Flüssigkeit. Ist die Oeffnung eine Figur, welche sich durch ein Diagonale in zwei symetrische Hälften theilen läßt und sind die umgebenden Wände des Gefässes ebenfalls symetrisch zu dieser Oeffnung gestellt, so hat der ausgetretene Strahl eine von der Oeffnung ausgehende geradlinige Axe, um welche sich der Strahl wiederum symetrisch anlegt. Die einfachsten hieher gehörenden Fälle sind die einer rechteckigen und einer kreisförmigen Oeffnung, welche nun näher betrachtet werden sollen.

Beim Ausflusse durch eine rechteckige Oeffnung soll ferner vorausgesetzt werden, daß zwei gegenüberstehende Ränder derselben in der Verlängerung der Gefäßwände liegen, mithin nur eine Contraction auf den zwei andern gegenüberstehenden Seiten stattfinde, und daß ferner jene erste, nicht contrahirte Dimension des Strahles genöthiget werde, immer gleich groß zu bleiben, was z. B. durch Verlängerung der beiden, durch zwei Kanten der Ausflußöffnung gehenden Gefäßwände geschehen kann. Man erhält hierdurch offenbar einen Strahl, dessen Querschnitt überall ein Rechteck mit unveränderlicher Höhe aber veränderlicher Breite ist.

Bedeutet $n^1 n_1{}^1 n_1 n$, Fig. 27, diesen Strahl, so werden die beiden Linien $n^1 n_1{}^1$ und $n n_1$ symetrisch sein, und eine durch die Mitte der Oeffnung und die Mitte des Abstandes $n_1{}^1 n_1$ gezogene Gerade wird der Strahl in zwei symetrische Hälften theilen. Zu jedem zwischen m_1 und n_1 durchgehenden Elementarkanale gibt es

ferner einen zwischen m_1 und n_1^1 durchgehenden symetrischen und ähnlich zu der Axe m_1m_2 liegenden andern Elementarkanal. Je näher diese Elementarkanäle bei den Linien n_1n und $n_1^1n^1$ liegen, um so mehr nähern sie sich diesen in ihrer Gestalt; der durch die Mitte der Oeffnung gehende Elementarkanal wird dagegen durch die Gerade m_2m_1 selbst gehen, weil dieser Kanal überall von beiden Seiten mit ganz gleichen Kräften gepreßt wird und daher weder nach der einen noch nach der andern Seite abweichen kann. Die zwischen n_1 und m_1 durchgehenden Kanäle werden daher auch der geradlinigen Gestalt um so näher kommen, je näher sie bei der Axe m_1m_2 gelegen sind. Betrachtet man nun die eine Hälfte $m_2m_1n_1n$ des Strahles, so bewegt sich dieselbe daher genau so, wie ein Strahl der an den parallelen Flächen sowie bei m_2m_1 mit ebenen Wänden eingeschlossen, auf der Seite n_1n aber frei ist, und richtet sich also nach den Gesetzen eines rechteckigen Strahles der durch einen Kanal fließt, dessen Krümmungshalbmesser R unendlich groß ist. Die zur Berechnung dieses Falles angegebenen Gleichungen 16 passen daher auch für den jetzt betrachteten Flüssigkeitsstrahl, und zwar von den Punkten n und n^1 an, wo er aus dem Gefässe tritt, bis in solche Entfernungen von dem Gefässe, in welchen der Einfluß der Schwere noch unmerklich ist.

Jenen Gleichungen zufolge ist daher die Geschwindigkeit in allen Punkten der Linie n_1n gleich groß, nämlich gleich der ganzen Geschwindigkeit, welche der Gefällshohe der Flüssigkeit entspricht. Geht man aber von da gegen die Axe m_1m_2 des Strahles hinein, so nimmt die Geschwindigkeit an allen Stellen, wo n_1n noch eine merkliche Krümmung hat, ab, und wird in der Axe selbst am kleinsten. Dieser Unterschied ist am größten in der Ausflußöffnung selbst, um so kleiner aber, je weiter man sich von derselben entfernt, und würde erst in unendlicher Entfernung ganz aufhören, wird jedoch schon in einer gewissen endlichen Entfernung unmerklich. — Die Gestalt der Linien n_1n und $n_1^1n^1$ wird ebenfalls durch die Gleichungen 16 und die durch sie berechnete Tabelle bestimmt, indem n_1n ein Stück der dort bestimmten Linie ist. Die Bestimmung ist aber nicht vollständig, indem auf keine Weise bekannt ist, welchem Punkte jener Linie der Ausflußpunkt n des Strahles

entspricht. Obgleich nun diese Frage nur mit weiter Annäherung gelöst werden konnte, ergibt sich doch aus dem bisher Gesagten Folgendes über die Gestalt des Strahles. Erstlich ist nicht abzusehen, wie das Gesetz, nach welchem die Linien n_1n und $n_1^1n^1$ gekrümmt sind, ein anderes werden sollte, wenn sich die Größe der Contraction, etwa durch Veränderung der Gefäßwände, ändert, so lange nur die contrahirte Breite $n_1n_1^1$ des Strahles gleich bleibt. Da aber dennoch bei verschiedenen Umständen der Winkel verschieden sein kann, unter welchem die Linie n_1n die Gefäßwand no bei n schneidet, so folgt, daß bei dem, unter den gegebenen Bedingungen ausfließenden Strahle die Linie n_1n immer ein Stück der gleichen Curve ist, wenn n_1 der Punkt ist, wo die Krümmung der Linie beginnt, und wenn die Breite $n_1n_1^1$ immer gleich bleibt; von dieser Curve ist n_1n ein um so größeres Stück, je größer die Contraction, ein um so kleineres, je kleiner dieselbe ist. Bei Strahlen von verschiedener contrahirter Breite $n_1n_1^1$ sind alle Dimensionen der Linie n_1n proportional mit dieser Breite. Die Dicke, oder die senkrecht zu der Fläche $n^1n_1^1n_1n$ stehende Dimension des Strahles hat auf die Gestalt von n_1n keinen Einfluß. Nun aber werfen folgende Betrachtungen einiges Licht auf die Lage des Punktes n. Würde die Linie n_1n die Gefäßwand no in n tangiren, so müßte der Elementarkanal n_1n von n an entweder geradlinig auf der Fläche no fortgehen oder sich von derselben abbiegen in einer Krümmung, welche ihre erhabene Seite nach no hin kehrte. Dasselbe müßte auch mit den zunächst bei n_1n liegenden inneren Elementarkanälen geschehen, so daß auch diese in der Nähe von n entweder geradlinig oder nach auswärts gebogen wären. Die Geschwindigkeit wäre ferners in der Nähe von n auf no am größten, in den von no entfernteren Kanälen aber immer kleiner. Nun ist aber früher gezeigt wordrn, daß bei geradlinigen Elementarkanälen die Geschwindigkeit in allen Punkten der gleichen Normalfläche gleich und bei gekrümmten Elementarkanälen in den näher bei der erhabenen Seite derselben gelegenen immer kleiner ist. Die Voraussetzung, daß n_1n bei n an der Linie no tangire, ist daher nicht zulässig, sondern es muß vielmehr angenommen werden, daß diese beiden Linien bei n sich unter einem

Winkel schneiden. — Dagegen muß der Elementarkanal n_1n doch in einiger Entfernung von n unmittelbar auf die Linie no zu liegen kommen, denn bliebe er stets in einem gewissen Abstande von derselben, so müßte zwischen beiden eine Flüssigkeitsmasse von ziemlich großer Ausdehnung bestehen, die entweder ganz ruhig wäre oder nur eine wirbelnde Bewegung hätte. Da nun aber die Geschwindigkeit der Flüssigkeit bei n viel größer ist als tiefer im Innern des Gefässes, so ist auch der Druck, den die Wände des Elementarkanales bei n auszuhalten haben, viel kleiner als im Innern des Gefässes. Jene flüssige Masse müßte also bei n einen viel kleinern Druck aushalten als in größerer Entfernung von der Oeffnung, unter welchen Verhältnissen sie aber nicht ruhig oder bloß wirbelnd sein könnte, sondern bei n ausfließen müßte. Da eine solche also nicht bestehen kann, so muß sich der Elementarkanal n_1n, bald nachdem er sich von n an etwas über no erhoben, wieder auf diese Linie hinuntersinken, oder geht, wenn man der Bewegung der Flüssigkeit folgt, zuerst über die Linie on hin bis zu einem gewissen Punkte t in der Nähe der Oeffnung, hebt sich dann in einem Bogen von no bis s und krümmt sich von da nach n hinunter. Ein mit stillstehender oder wahrscheinlicher wirbelnder Flüssigkeit gefüllter Raum tsn bleibt zwar immerhin übrig, aber derselbe ist jedenfalls so klein, daß die verschiedenen auf ihn ausgeübten Pressungen leicht durch die entgegengesetzten Pressungen aufgehoben werden können, welche durch die wirbelnde Bewegung selbst entstehen und nach früher Gesagtem an verschiedenen Punkten des Wirbels auch verschieden sein können. Jedenfalls sind alle diese Pressungen sehr unbedeutend, da sie von n an, außer dem Drucke der athmosphärischen Luft, vollständig gleich Null werden. Die Nothwendigkeit der Biegung st bestätigt sich auch noch durch Folgendes. In der Normalfläche sw, die von s, oder einer andern, die von einem zwischen s und n gelegenen Punkte ausgeht, ist die Geschwindigkeit in der Nähe von sn groß, in der Nähe von w dagegen klein. In einer andern von einem auf to in der Nähe von t gelegenen Punkte ausgehenden Normalfläche tw_1 ist der Unterschied der Geschwindigkeit viel kleiner, weil die Elementarkanäle in der Gegend

von t nahe geradlinig sind. Da nun die Geschwindigkeit bei w_1 jedenfalls eher kleiner als bei w, die bei t und dessen Nähe aber viel kleiner als bei s ist, so vermehren beim Uebergange von tw_1 nach sw vorzüglich die nahe bei st gelegenen Elementarkanäle ihre Geschwindigkeit. Da sie aber in demselben Verhältnisse ihre Breite vergrößern, so müssen sie sich von s aus rasch weiter nach t hin ausdehnen, was nur möglich ist, wenn die Biegung st besteht. Weniger Bestimmtes läßt sich über die Größe und Gestalt der Biegung nst sagen. Da der Druck in dem von dieser Biegung eingeschlossenen Raume jedenfalls von einem Athmosphärendrucke wenig verschieden ist, so wird sich auch das Stück ns nahezu nach denselben Gesetzen richten, wie n_1n und mithin s nahezu derjenige Punkt dieser Linie sein, für welchen in der nach den Gleichungen 16 berechneten Tafel $x = o$ und $\psi = 90^0$ gesetzt wurde. Am wichtigsten wäre es nun, den Abstand des Punktes s von nt oder auch den Winkel zu bestimmen, unter welchem n_1n in n die Gerade no schneidet, weil sich daraus die Größe der Contraction oder des Verhältnisses von $n_1{}^1n_1$ zu n^1n ergeben würde. Letzteres kann mit einiger Annäherung etwa auf folgende Weise geschehen. Beim vollen Ausfluß durch eine gerade Röhre mit parallelen Wänden hat die Linie n_1n, die dann auch eine Gerade ist, dieselbe Richtung wie diese Wände und die Axe des Strahles selbst, so daß der Winkel, den sie mit ihnen und jener Axe bildet, gleich 0^0 ist. Die Wände selbst bilden in diesem Falle ebenfalls den Winkel 0^0 mit einander. Läßt man nun die Röhre allmählig conisch werden, Fig. 18, so daß ihr Querschnitt beim Ausflusse am kleinsten ist, und ihre gegenüberstehenden Wände den Neigungswinkel φ mit einander bilden, so wird die durch n an n_1n gezogene Tangente einen um so größern Winkel ψ mit der Axe des Strahles bilden, je größer φ ist. Für $\varphi = 180^0$ hat man den Fall des Ausflußes aus einer Oeffnung in ebener Wand, für welchen ψ noch unbekannt ist. Stülpt man aber den Rand der Oeffnung nach einwärts, so wird φ größer als 180^0, und setzt man sogar eine einspringende prismatische Ansatzröhre ein, so ist $\varphi = 360^0$. Nun kann man aber jedenfalls von der Wahrheit nicht sehr viel abweichen, wenn man annimmt, daß für diesen Fall n mit dem

Punkte s der Linie nın zusammenfalle, für welchen $\psi = 90^0$ ist, da alsdann die Flüssigkeit in diesem Uebergangspunkte der Richtung nach gleich viel von ihrer ursprünglichen Richtung im Gefäß und von ihrer nachherigen im Strahle abweicht. Nimmt man nun an, das Verhältniß von φ zu ψ bleibe stets wie 90 zu 360 oder wie 1 zu 4, so hat man für jede Ausflußöffnung einfach: $\psi = \frac{1}{4}\varphi$.

Da nun für $\psi = \varphi$ oder für den contrahirten Strahl $n_1{}^1n_1 = b_1$, für irgend einen andern Werth von ψ aber $n^1n = y = l_1 \ldots . b_1$ ist, so ist der Contractionscoeffizient für einen beliebigen Winkel φ gleich $\frac{b_1}{y}$.

Nimmt man die Werthe von y aus der Tabelle auf S. 53, so erhält man für verschiedene Werthe des Winkels ψ folgende Contraktionscoeffizienten.

$\varphi = 12^0$,	$\psi = 3^0$,	$y = 1{,}03\ b_1$	Cont.-Coeff. = 0,97
20	5	1,05 „	0,95
30	7,5	1,08 „	0,93
40	10	1,11 „	0,90
50	12,5	1,13 „	0,89
180	45	1,47 „	0,68
360	90	1,91 „	0,52

Ganz dasselbe was über den freien Theil nın des ausfließenden glatten Strahles, über die Lage des Punktes n und über die Bewegung der Flüssigkeit im Innern des Gefäßes zunächst bei der Ausflußöffnung gesagt wurde, kann auch auf den Ausfluß aus einer runden Oeffnung, wo der Querschnitt des Strahles ebenfalls kreisförmig ist, angeführt werden, nur müssen hier bei den Rechnungen überall die Gleichungen 18 und die aus ihnen berechnete Tabelle zu Grunde gelegt werden. Berechnet man mit Hülfe derselben nach den gleichen Grundsätzen wie für den platten Strahl die Contractionskoeffizienten für conische Ausflußröhren mit verschiedenem Winkel der Convergenz, für die Oeffnung in ebener Wand und für eine einspringende cylindrische Röhre, so erhält man, da jetzt dieser Coeffizient proportional mit $\frac{1}{y^2}$ ist, die in

folgender Tafel aufgestellten Werthe. Zur Vergleichung sind in einer nebenstehenden Spalte die für dieselben Ausflußöffnungen durch Versuche bestimmten Coeffizienten (d'Aubuisson traîté d'hydr. p. 56) verzeichnet.

			Coeff. d. Berechn. bestimmt =	Coeff. d. Vers. bestimmt =
$\psi = 12^0$,	$\varphi = 3^0$,	$y = 1,02\ b_1$	0,96	1
20	5	1,03 „	0,94	0,97
30	7,5	1,05 „	0,91	0,93
40	10	1,06 „	0,89	0,90
50	12,5	1,08 „	0,86	0,86
180	45	1,27 „	0,63	0,65
360	90	1,47 „	0,47	0,50

In Bezug auf die Bedeutung der Annahme $\varphi = \frac{1}{4}\psi$ mag noch bemerkt werden, daß dieselbe gleichbedeutend ist mit der Annahme, die Linie n, nt stehe in allen Fällen im Punkte n normal auf der Halbirungslinie des Winkels, den die Gefäßwand no mit der parallel zur Axe des Strahles gezogenen Linie nq bildet.

Die Abweichungen, welche die unter dieser Annahme berechneten Ergebnisse, die in obigen Tafeln zusammengestellt sind, von den durch Versuche bestimmten Zahlen zeigen, sind theils der Ungenauigkeit dieser Annahme, wohl aber vorzüglich auch dem Einflusse der Anziehungskraft der Wände auf die Flüssigkeit zuzuschreiben, durch welche die Contraction leicht etwas verändert werden kann.

Befindet sich die Ausflußöffnung nicht im horizontalen Boden, sondern in einer beliebig geneigten Wand eines Gefässes, Fig. 28, so ändert sich das Gesetz, nach welchem der Ausfluß erfolgt, um so mehr, je größer die senkrechte Entfernung des höchsten Punktes n^1 der Oeffnung vom tiefsten n, im Verhältnisse zur ganzen Druckhöhe der Flüssigkeit im Gefässe ist. Denn da die Geschwindigkeit der Elementarkanäle in n^1 und n den senkrechten Entfernungen dieser beiden Punkte von dem Spiegel der Flüssigkeit entspricht, also ungleich ist, so ist der ausfließende Flüssigkeitsstrahl nicht mehr nach allen Richtungen hin symetrisch in Bezug auf eine durch ihn gezogene Axe.

Um so genauer lassen sich dagegen die oben entwickelten Gesetze auf den Fall anwenden, wo die Flüssigkeit durch einen regelmäßigen Kanal fließt, an dessen Ende ein Schützen, Fig. 30 und 31, wie bei den Gerinnen von Wasserrädern, angebracht ist, und zwischen dessen unterm Rande und dem Boden des Kanales die Flüssigkeit austritt. Denn in diesem Falle begrenzt wieder der geradlinige Boden $m_1 m_2$ des Kanals den Strahl auf der einen Seite; diese Linie ist zudem noch horizontal oder nur unter einem sehr kleinen Winkel zum Horizonte geneigt, so daß die Schwere auf den Elementarkanal $m_1 m_2$ keinen oder nur einen sehr unbedeutenden Einfluß ausübt. Der Strahl befindet sich daher hier ganz in den Verhältnissen, welche bei Aufstellung der Gleichungen 16 angenommen wurden. Daher wird sich sowohl die Linie $n_1 n$, als die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in den verschiedenen Punkten des Flüssigkeitsstrahles nach den durch jene Gleichungen ausgedrückten Gesetzen richten, und zwar in ähnlicher Weise, wie beim Ausfluß durch eine rechteckige Oeffnung im Boden eines Gefässes beschrieben wurde. Es wird also die Linie $n_1 n$ im Punkte n den Schützen nicht tangiren, sondern im Gegentheil unter einem gewissen Winkel in das Innere des Kanales hineintreten, sich aber bald bei t an den Schützen anlehnen, so daß zwischen n und t auf der innern Seite des Schützen nur ein kleiner Raum mit wirbelnder Flüssigkeit entsteht. Die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen im Strahle wird sich nur darin von dem den Gleichungen 16 zu Grunde liegenden Falle unterscheiden, daß die Geschwindigkeit bei n_1 etwas größer ist als bei n, indem n_1 etwas tiefer liegt als n, während dort die Geschwindigkeit auf der ganzen Linie $n_1 n$ gleich angenommen wurde. Dagegen muß hervorgehoben werden, daß die Geschwindigkeit derjenigen Flüssigkeitstheilchen, die in der gleichen Normalfläche sind, vollständig jenen Gleichungen entsprechen müssen, indem dieselben auch den Einfluß der Schwere in dieser Beziehung berücksichtigen. In einer beliebigen Normalfläche nm z. B. wird daher die Geschwindigkeit bei n am größten sein und gegen n hin, wegen des durch die Centrifugalkraft bewirkten Druckes, immer abnehmen, so daß sie in m selbst ihren kleinsten Werth erhält. Erst in solchen Entfernungen von der Schleussenöffnung, wo $n_1 n$

keine merkliche Krümmung mehr hat, also in einer Entfernung von etwa dem Doppelten oder höchstens dem Dreifachen der Höhe der Ausflußöffnung, wird die Geschwindigkeit in allen Punkten eines senkrecht durch den Strahl geführten Querschnittes gleich groß sein. Die Contractionscoeffizienten für Schützen von verschiedener Neigung zum Boden des Kanales sind ganz gleich wie die für die entsprechenden Fälle des Ausflusses aus einer rechteckigen Ansatzröhre mit nur zweiseitiger Contraction. Bezeichnet man den Winkel des Schützen mit dem Boden des Kanales durch φ, so entspricht also $\varphi = 90^0$ einer senkrechten, $\varphi = 45^0$ einer um 45^0 aufwärts gegen den Kanal geneigten Schütze, während $\varphi = 180$ einer Ausflußöffnung wie in Fig. 32 entsprechen würde. Nimmt man wieder an, daß die durch den Punkt n an n_1n gezogene Tangente in dem letzten Falle senkrecht zu der Linie m_1m_2 stehe, und daß also der Winkel ψ (Gleichung 16) gleich 90^0 oder gleich $\frac{1}{2}\varphi$ sei, und setzt man auch wieder voraus, daß dieses Verhältniß zwischen φ und ψ für alle Werthe von ψ gleich bleibe, so suche man zur Bestimmung des Contractionscoeffizienten für irgend einen Winkel φ zuerst den zugehörigen Winkel ψ, dann in der Tabelle auf S. 53 den entsprechenden Werth von y, so ist der Contractionscoeffizient gleich $\frac{b_1}{y}$, wo b_1 den Werth von y in einem Punkte n_1 bedeutet, wo die Contraction vollendet ist. Auf diese Weise erhält man für verschiedene Schützen folgende Contractionscoeffizienten:

$\varphi = 10^0$,	$\psi = 5^0$,	Cont.=Coeff. = 0,95,	y = 1,05
20^0	10^0	0,90	1,11
40^0	20^0	0,83	1,21
60^0	30^0	0,76	1,31
80^0	40^0	0,71	1,40
90^9	45^0	0,68	1,47
100^0	50^0	0,65	1,54
120_0	60^0	0,61	1,64
140^0	70^0	0,58	1,73
160^0	80^0	0,54	1,84
180^0	90^0	0,52	1,91

Die Geschwindigkeit im contrahirten Strahle ist wie bei n_1; diese Contractionscoeffizienten beziehen sich daher auf die Druckhöhe, die dem Punkte n_1 oder also bei kleinen Contractionen sehr nahe dem obern Rande der Ausflußöffnung entspricht. Schließlich ist noch zu bemerken, daß alle diese Ergebnisse, wie übrigens aus der ganzen Darstellung hervorgeht, nur dann anwendbar sind, wenn die Ausflußöffnung, sowie das Gerinne außer derselben, die gleiche Breite wie der Kanal hat. Folgendes sind die mittleren durch Versuche bestimmten Contractionscoeffizienten:

$\varphi =$	45°,	Cont.-Coeff. $=$	0,80
„	60	„	0,74
„	90	„	0,70

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14
Fig. 13.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.

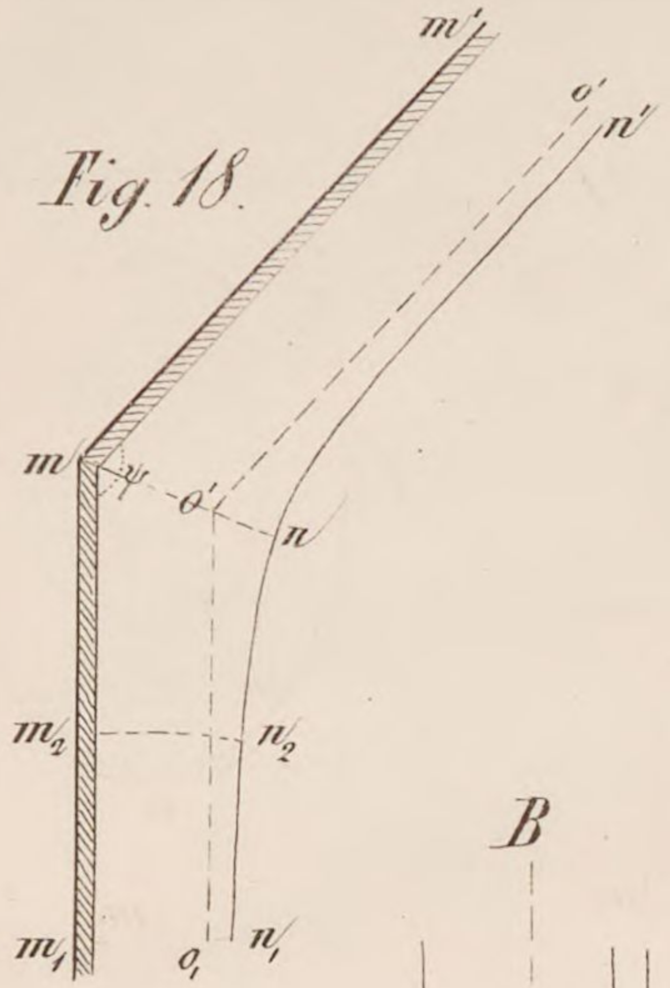


Fig. 18.

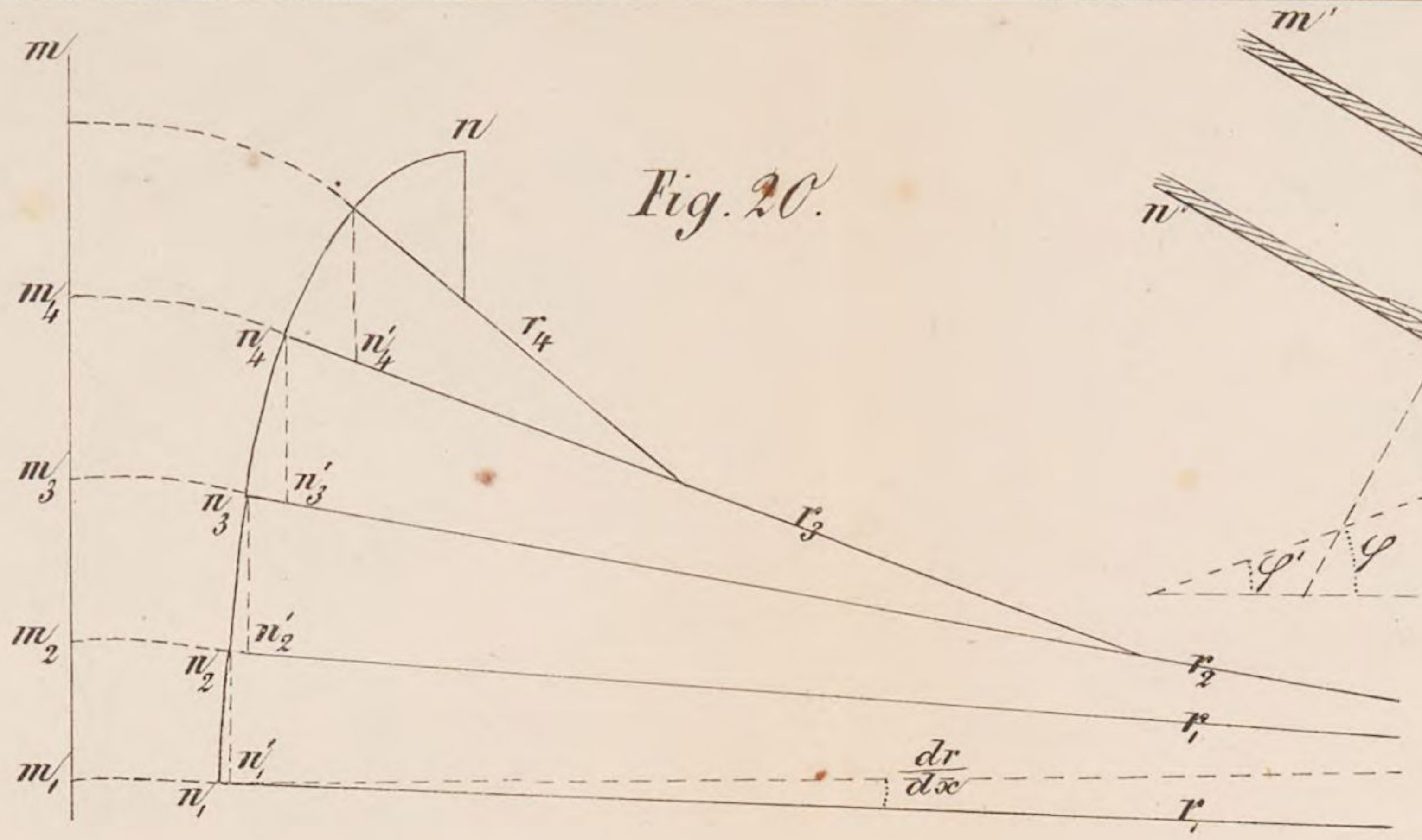


Fig. 20.

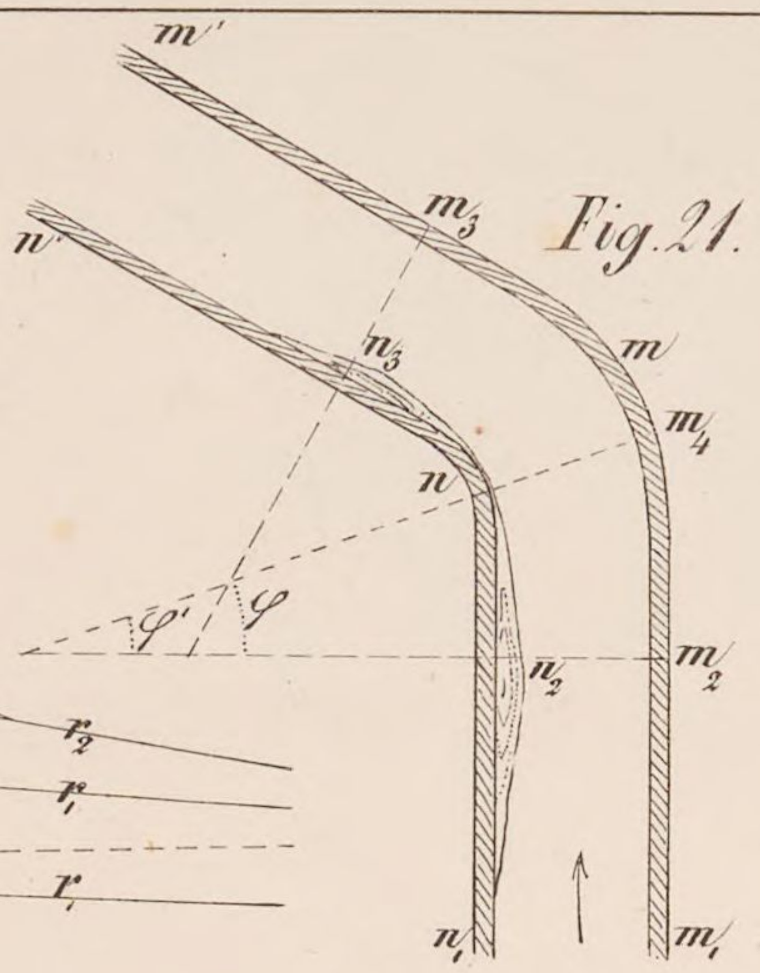
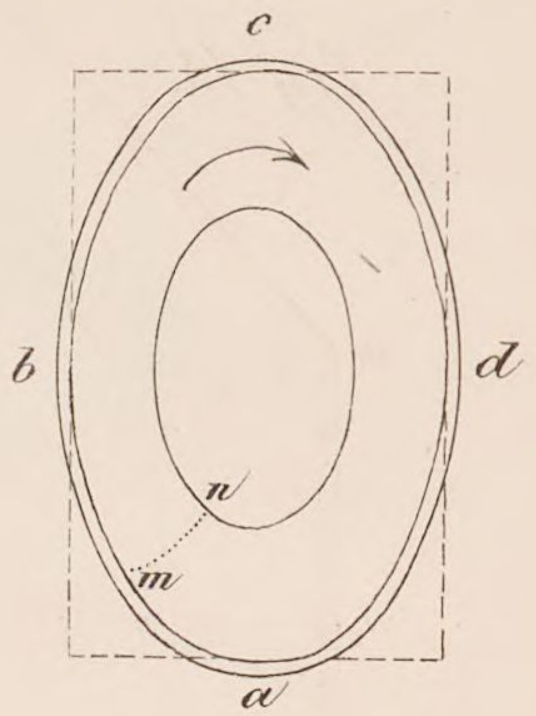


Fig. 21.



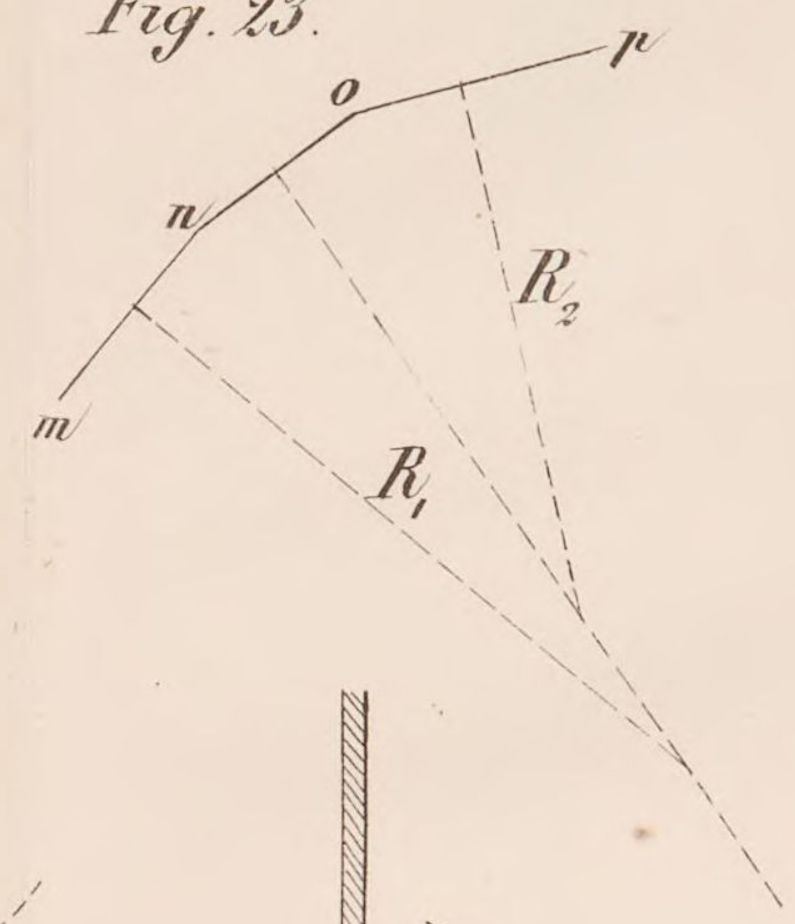


Fig. 23.

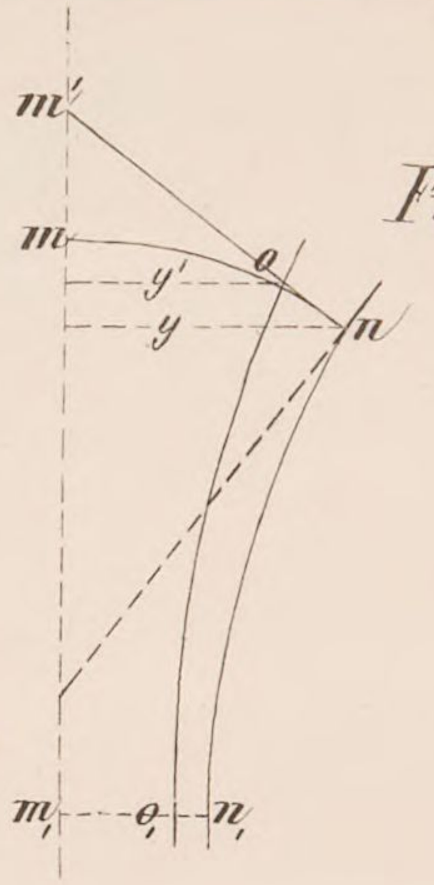


Fig. 25.

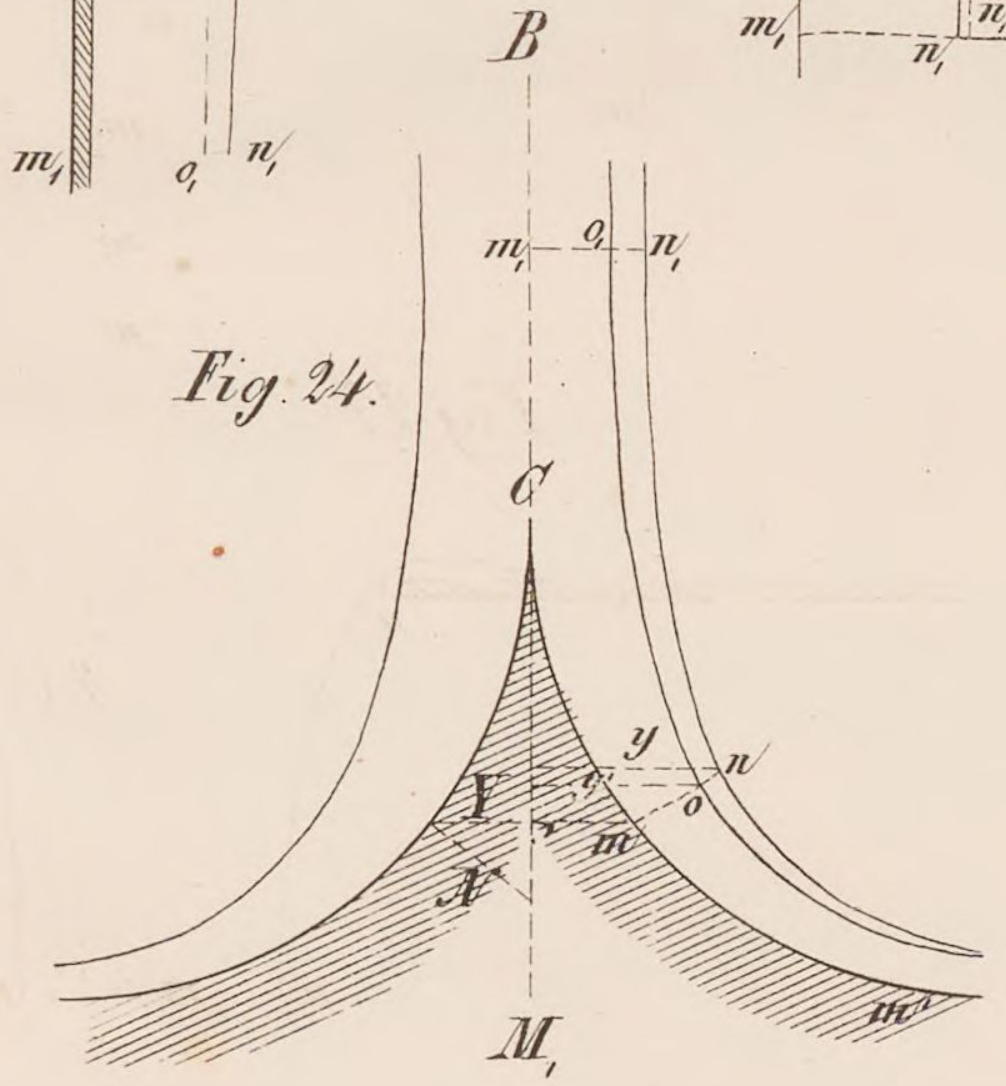


Fig. 24.

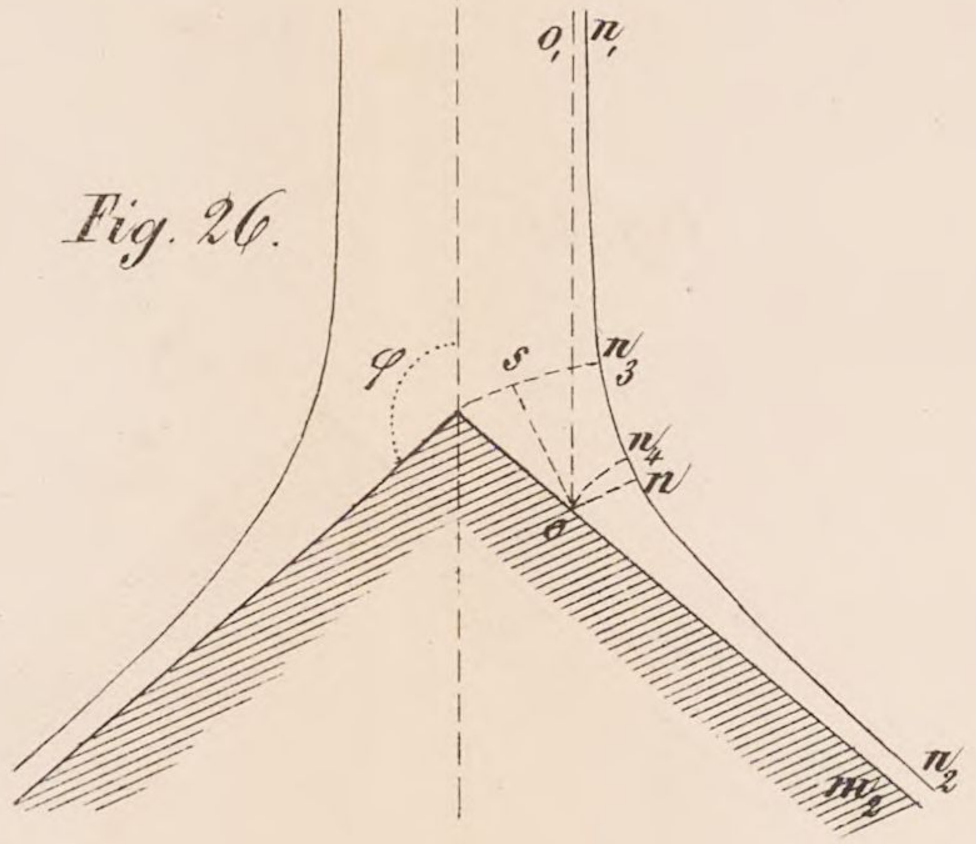


Fig. 26.

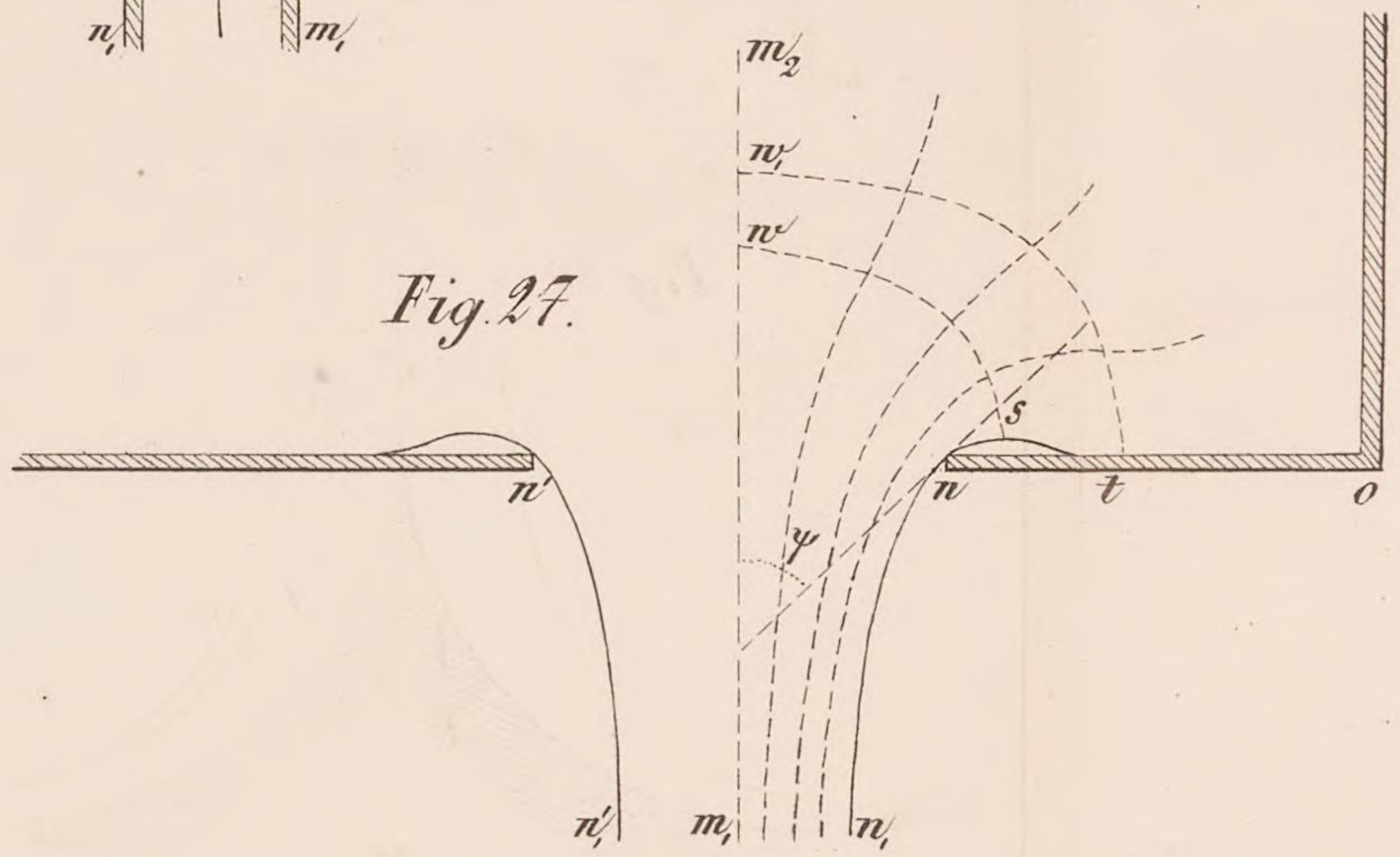


Fig. 27.

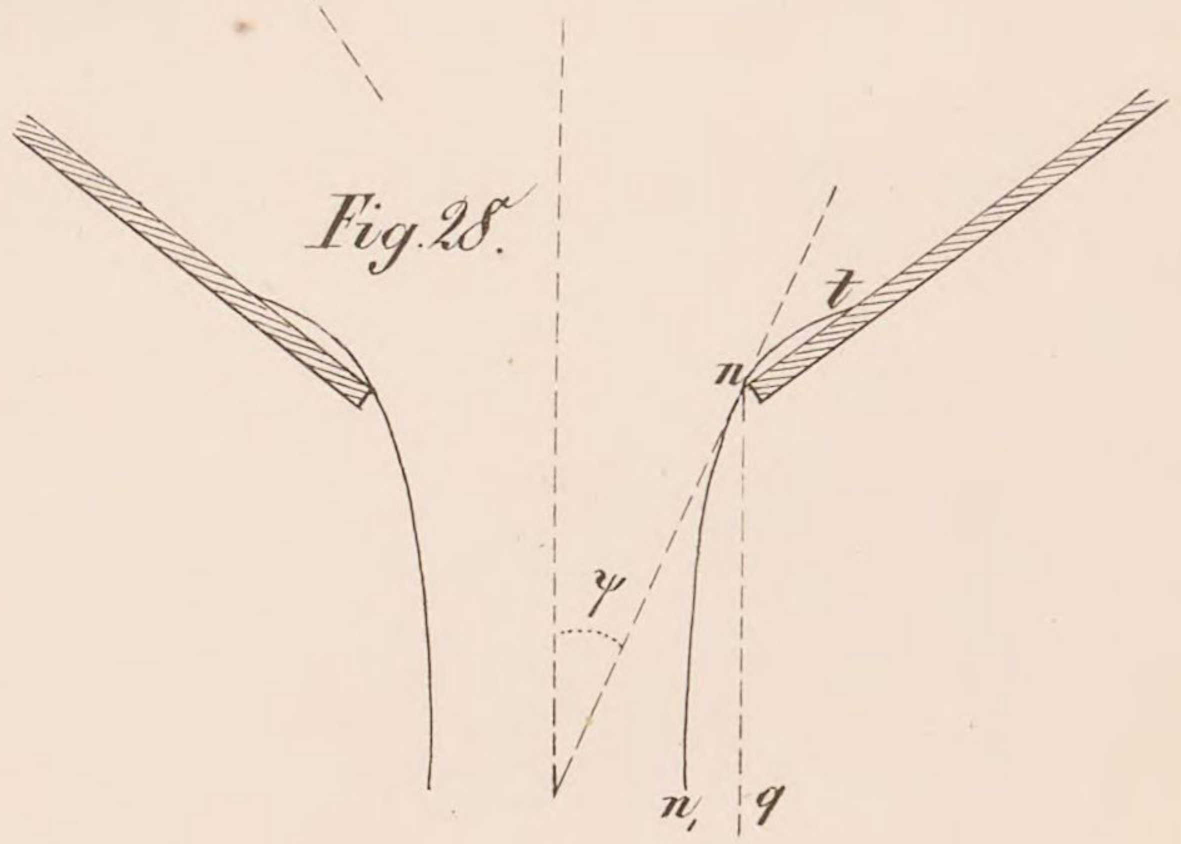


Fig. 28.

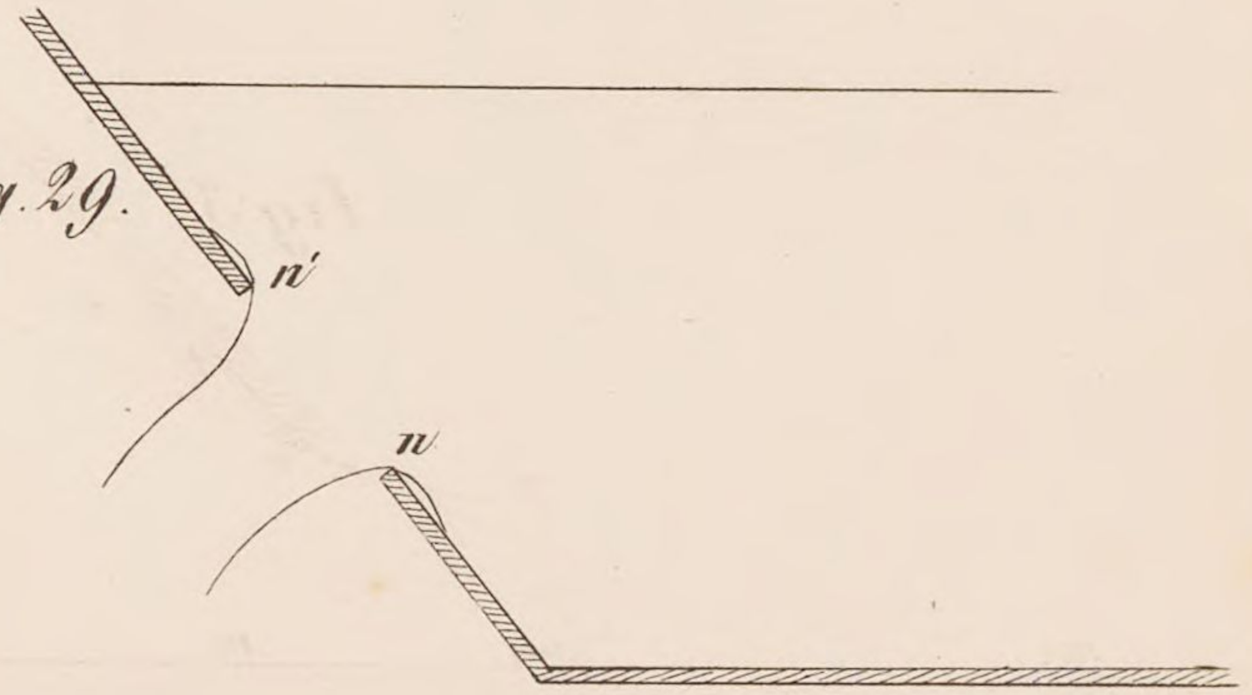


Fig. 29.

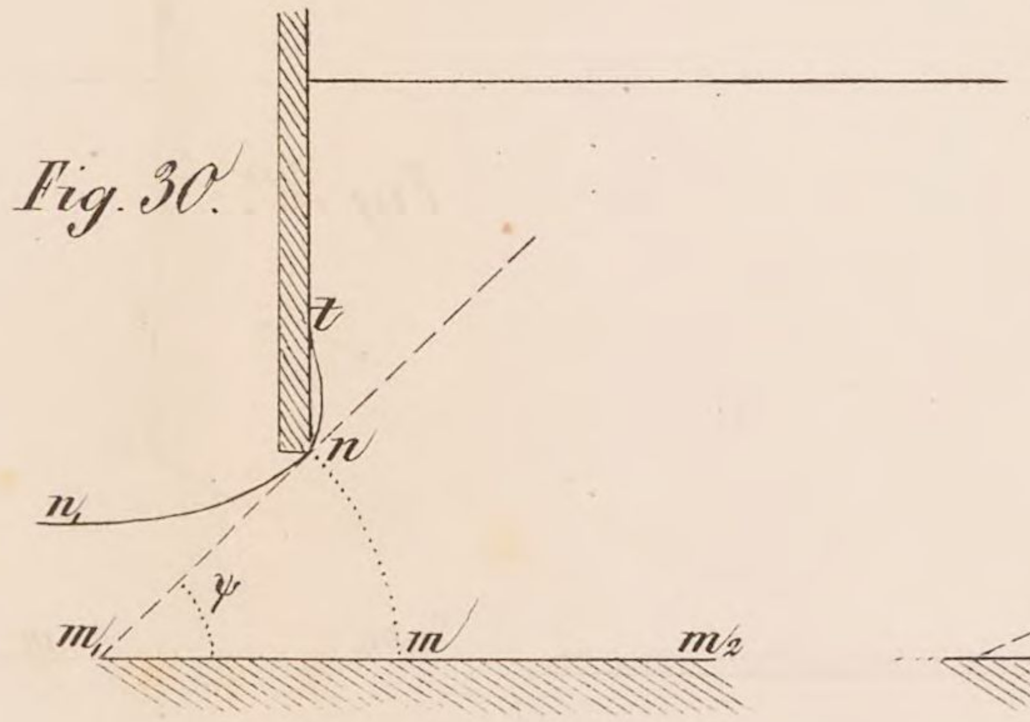


Fig. 30.

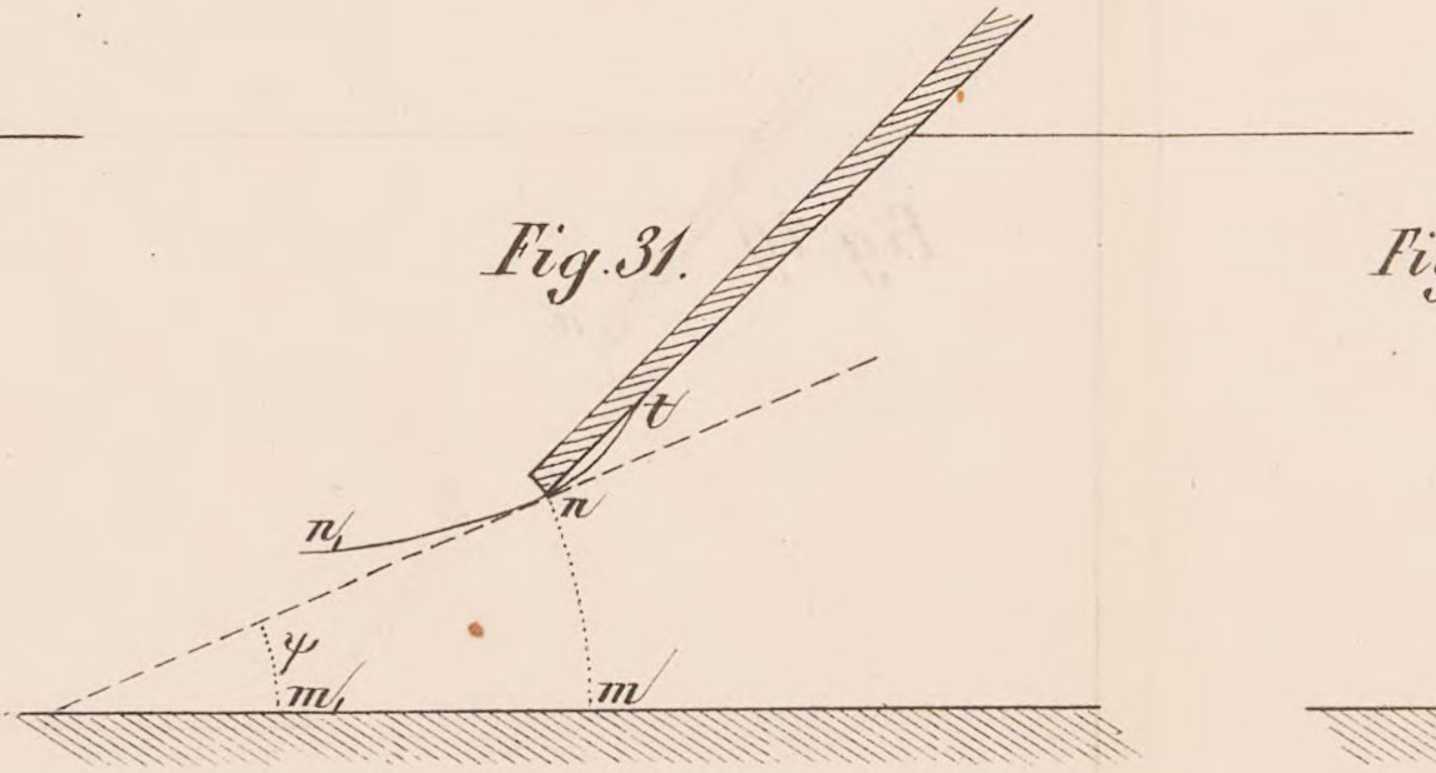


Fig. 31.

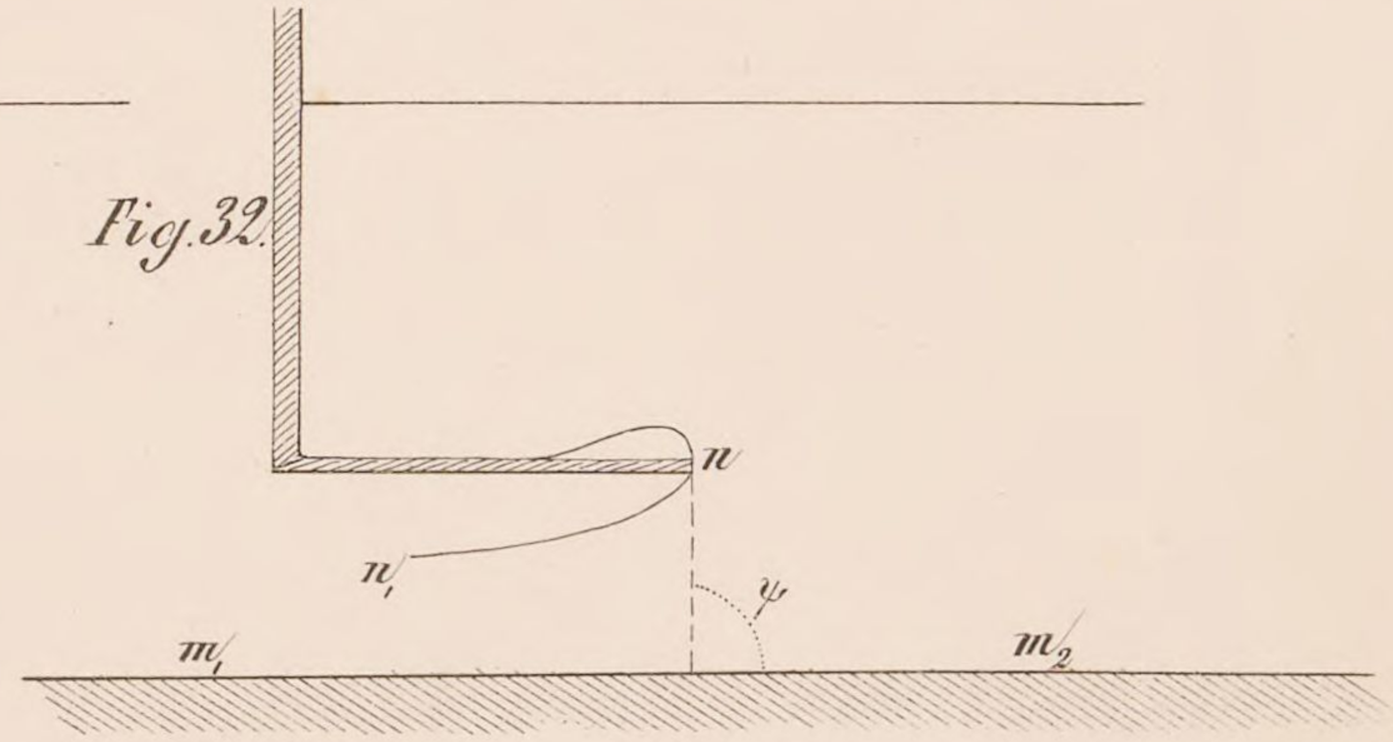


Fig. 32.

Inhaltsverzeichniß.

Seite.

Ueber die in den Beharrungszustand gelangte Bewegung von Flüssigkeiten 1

Geradlinige Bewegung von Flüssigkeiten 15

Parallele geradlinige Bewegung von Flüssigkeiten 17

Nicht parallele geradlinige Bewegung von Flüssigkeiten . . 19

Krummlinige Bewegung von Flüssigkeiten 22

Bewegung eines rechteckigen gekrümmten Flüssigkeitsstrahles (Fig. 16.) 29

Beide Krümmungshalbmesser sind gleich, oder R = r . . . 36

Der Krümmungshalbmesser R sei gleich Null, oder der Flüssigkeitsstrahl fließe über eine hohle Ecke. (Fig. 18.) . . . 40

Der Krümmungshalbmesser R sei unendlich groß, oder die Flüssigkeit fließe durch einen geradlinigen Kanal 47

Bewegung der Flüssigkeit durch gekrümmte Röhren (Fig. 21) 54

Bewegung eines geraden runden Flüssigkeitsstrahles (Fig. 24) 65

Der Krümmungshalbmesser R sei gleich Null, oder der Strahl werde von der Spitze eines Kegels getheilt (Fig. 26) . . 79

Ausfluß von Flüssigkeiten aus Gefäßen 82

In unserm Verlage sind ferner erschienen:

J. L. Raabe,

die Differenzial= und Integralrechnung.

1ster Theil; 2ter Theil 1ste und 2te Abtheilung. gr. 8. 1839. 43. 47.
10 Rthlr. 15 fl.

1ster Theil: Die Differ.= und Integral=Rechnung mit Funktionen einer Variabel. gr. 8. 1839. 3 Rthlr. 10 Ngr. 5 fl.

2ter Thl. 1ste Abth.: Dieselbe mit Funktionen mehrerer Variabeln. gr. 8. 1843. 3 Rthlr. 10 Ngr. 5 fl.

2ter Thl. 2te Abth.: Dieselbe mit Gleichung zweier und mehrerer Variabeln. gr. 8. 1847. 3 Rthlr. 10 Ngr. 5 fl.

H. Bräm,

der Zeichnungs=Proportional-Zirkel und der Theilkreis.

Zwei nützliche Instrumente zum Behuf des geometrischen und praktischen Zeichnens in neu erfundener zweckmäßiger Gestalt. Beschrieben und mit Gebrauchsanleitung versehen von G. v. Escher. Zunächst für technische Lehranstalten, Zeichnungsschulen, Architekten, Mechaniker, Theater= und Dekorationsmaler, Lithographen, Kupferstecher u. s. f. Mit 3 lithogr. Erklärungstafeln. gr. 4. 1840. 15 Ngr. 45 kr.

J. W. Deschwanden,

Abriß der Mechanik zum Gebrauche beim Unterrichte an höhern Lehranstalten.

8. 1848. 24 Ngr. 1 fl. 12 kr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Deschwanden, J. W.

Ueber die in den Behaarungszustand gelangte Bewegung der Flüssigkeiten

Zürich 1848

A.hydr. 28 hg
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10059809-1